CZECH INSTITUTE
OF INFORMATICS
ROBOTICS AND
CYBERNETICS
CTU IN PRAGUE

Vlnková transformace

Analýza signálů I

ZS 2023/2024

Michal Huptych

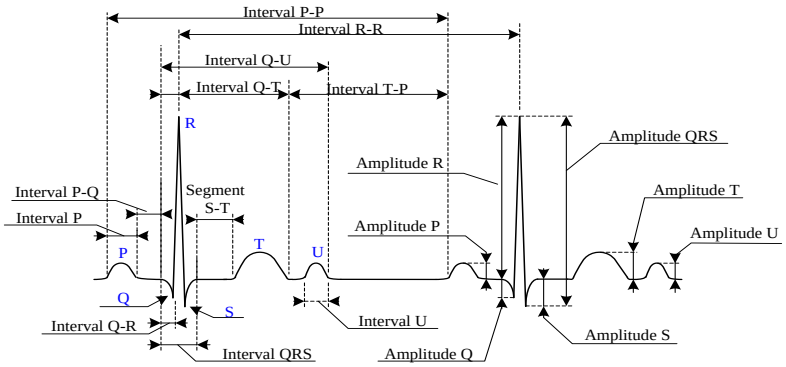
19. 12. 2023

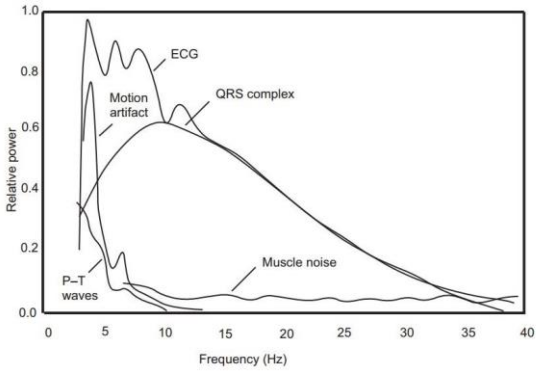
Sigál v časové doméně

- Signál měřený v čase
  - Amplituda je závislou veličinou funkce času
- Přirozená reprezentace měřené veličiny
  - Většina měření probíhá primárně v čase
- Ne vždy vhodná doména pro analýzu signálu
  - Nemá v časové oblasti jasně patrnou informaci
  - Je rušený a rušení je více patrné v jiné doméně
  - Vhodná extrakce příznaků v jiné doméně

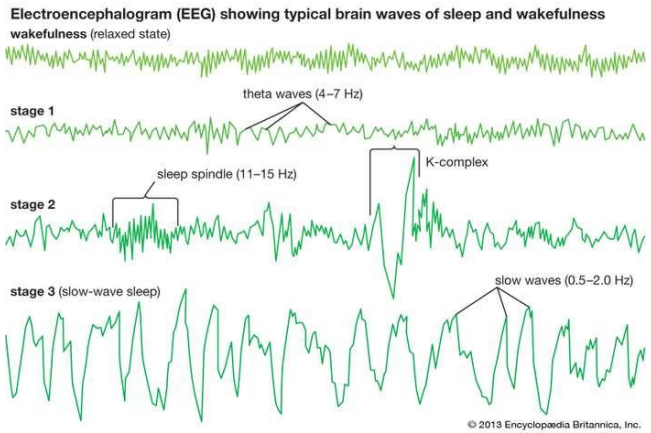
Sigál v časové doméně (2)

- Typický rozdíl ve dvou biosignálech z hlediska domény zpracování
  - Elektrokardiogram (EKG) - Signál mající diagnostický význam v časové oblasi

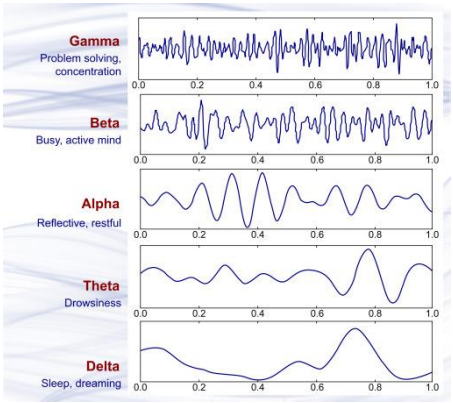




  - Elektroencefalogram (EEG) - Signál mající diagnostický význam ve frekvenční oblasti



Reference: https://www.britannica.com/science/electroencephalography



Reference: Introduction to EEG- and Speech-Based Emotion Recognition, 2016

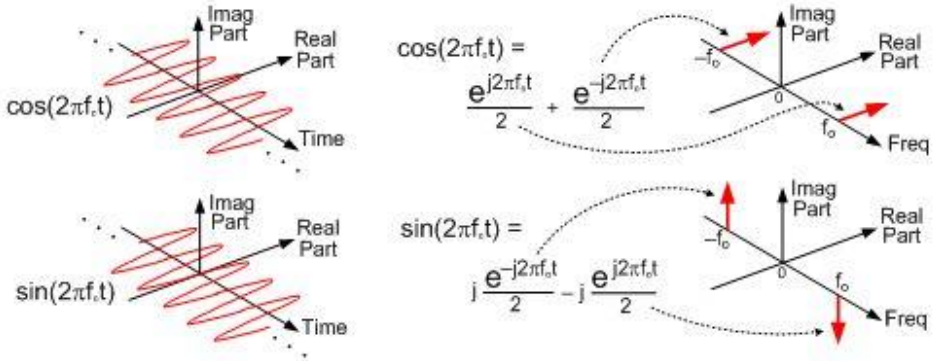
ČVUT ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
ČESKÝ INSTITUT INFORMATIKY ROBOTIKY A KYBERNETIKY

Sigál ve frekvenční doméně

- Základní metoda je Fourierova transformace

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t}dt = s(t) \cdot (\cos(\omega t) - j \cdot \sin(\omega t))$$

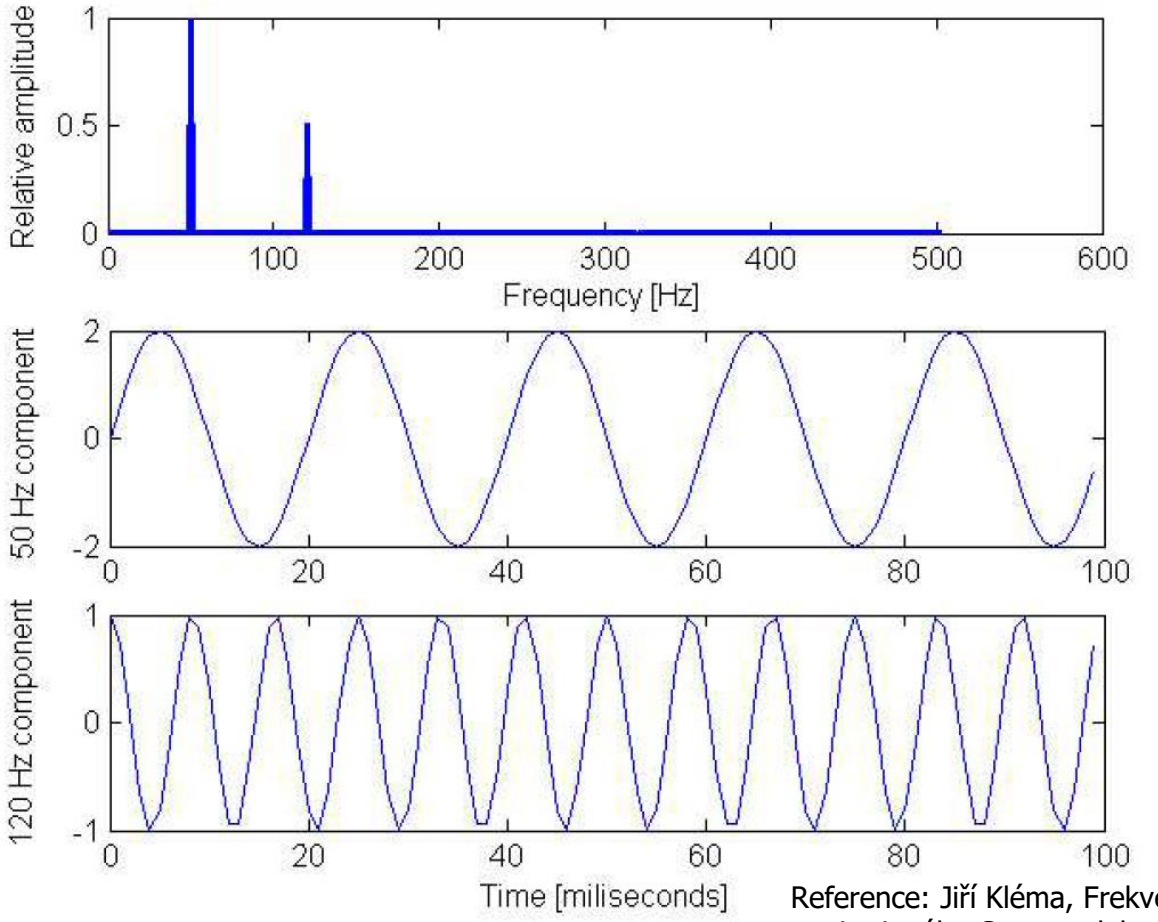
- Převod z čistě časové oblasti do čistě frekvenční oblasti
- Rozložení na frekvenční složky reprezentované bazí (sin, cos)
- Signál ve frekvenční oblasti je komplexní signál
  - Rozklad tedy probíhá z 1D do 2D prostoru (frekvence, reálná, imaginární složka) – my však zobrazujeme mod – tedy opět 1D signál



Reference: Rick Lyons, A Quadrature Signals Tutorial: Complex, But Not Complicated, 2013, dostupné na: https://www.dsprelated.com/showarticle/192.php

Sigál ve frekvenční doméně (2)

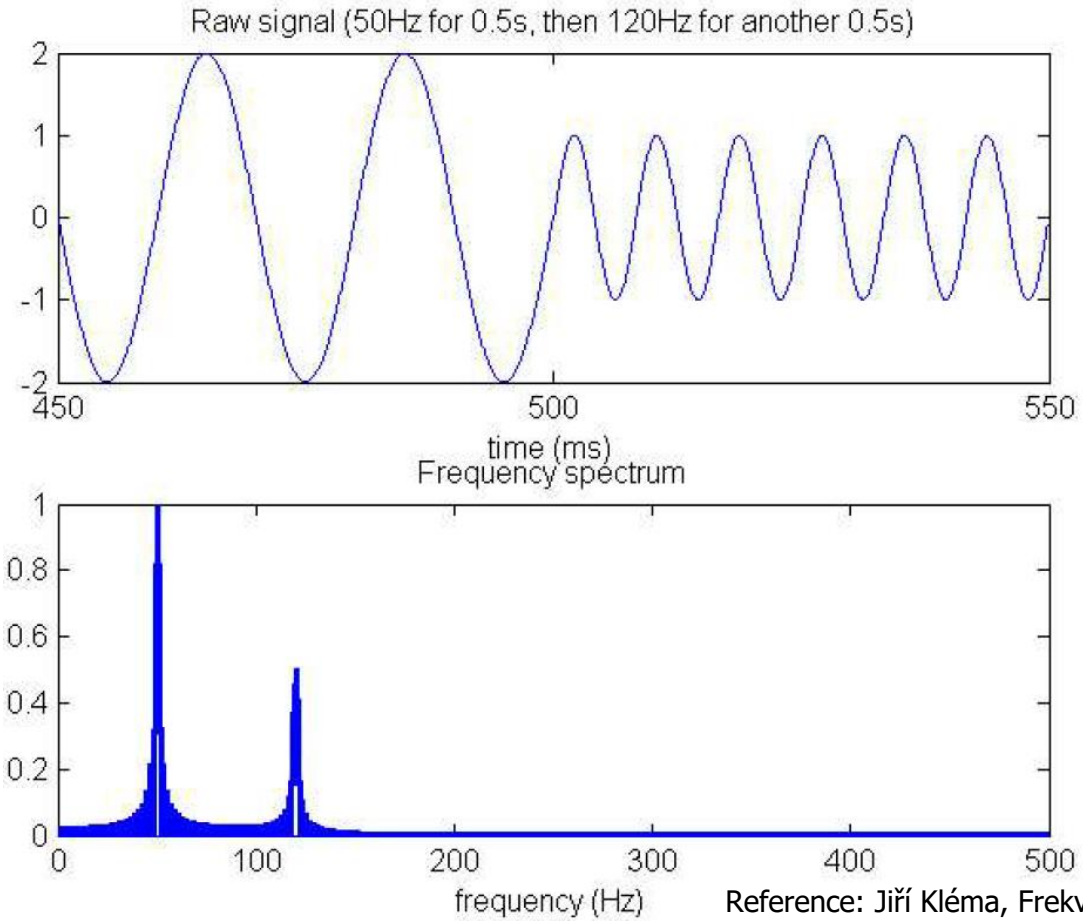
- U stacionárního signálu spektrum jasně definuje složky signálu
  - Ztráta informace o čase není z pohledu vlastností signálu problematický



Reference: Jiří Kléma, Frekvenční a časově-frekvenční popis signálu, Gerstner laboratory, Machine Learning Group

Sigál ve frekvenční doméně (3)

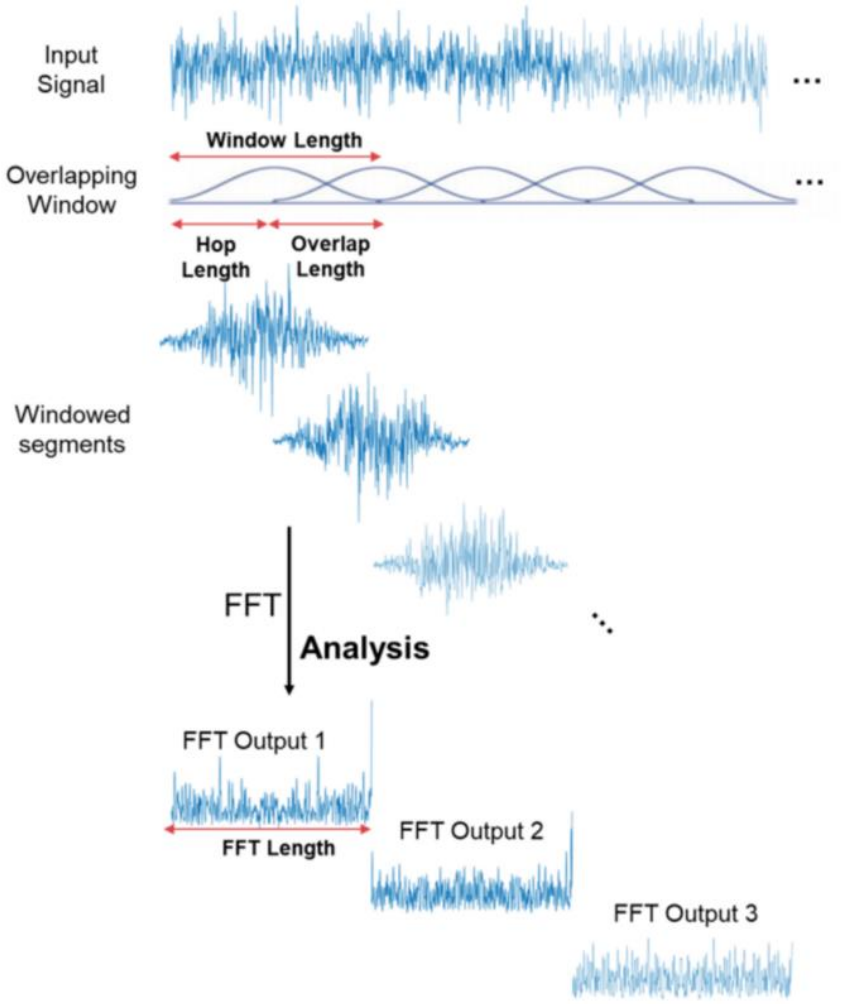
- U nestacionárního signálu spektrum popisuje všechny frekvenční složky signálu, ale ztráta informace o čase může být významná



Reference: Jiří Kléma, Frekvenční a časově-frekvenční popis signálu, Gerstner laboratory, Machine Learning Group

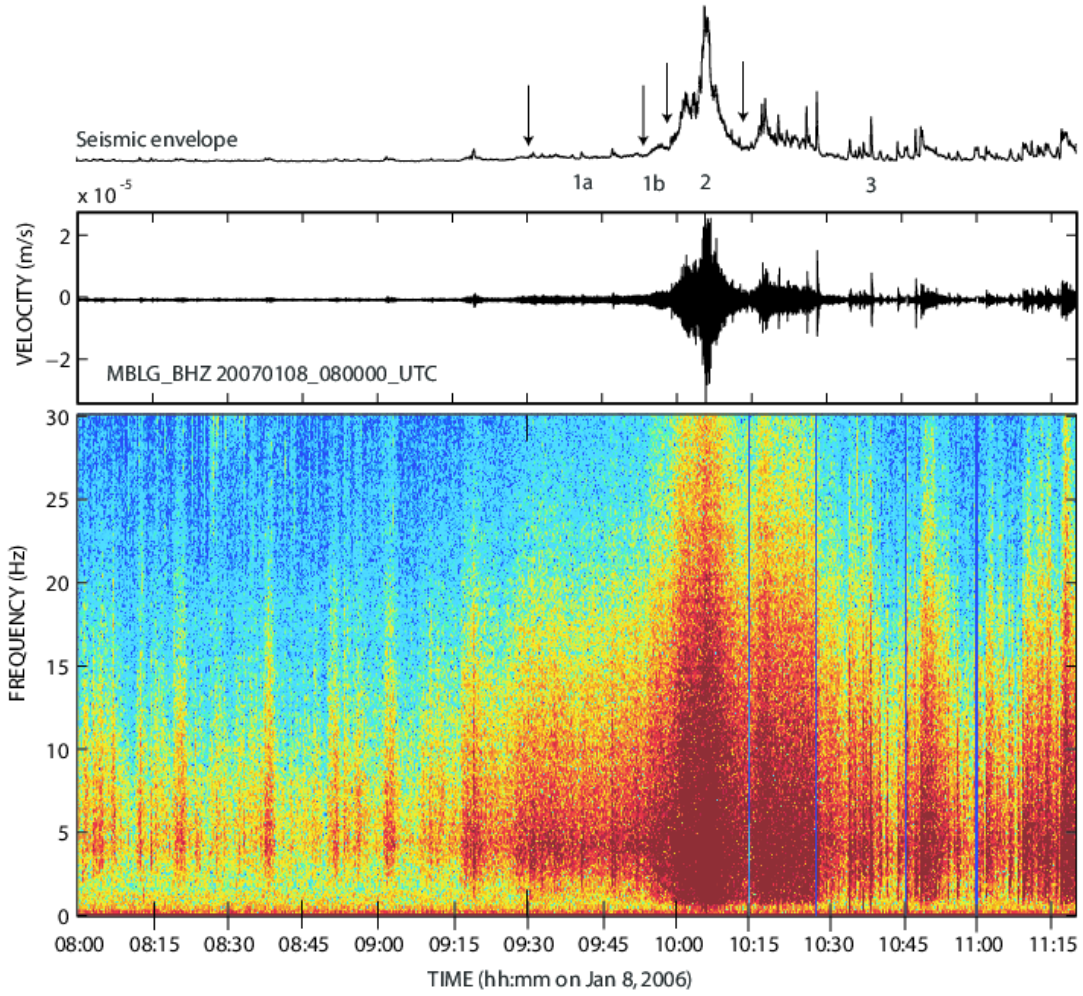
Časově-frekvenční oblast

- Short-time Fourier Transform (STFT)
  - Metoda založená na Fourierově transformaci a rozdělení signálu v časové oblasti
  - Český překlad
    Okénková Fourierova transformace
  - Násobení signálu posuvným oknem
  - Výstup ve třech dimenzích
    – frekvence
    – čas
    – amplituda
  - Amplituda je funkcí frekvence a času
  - Délka okna určuje přesnost transformace v časové a/i frekvenční oblasti



Časově-frekvenční oblast (2)

- Nejčastější zobrazení pomocí spektrogramu



Reference: Silvio De Angelis at al., Seismic characterization of pyroclastic flow aktivity at Soufriere Hills Volcano, Montserrat, 8 January 2007

Časově-frekvenční oblast (3)

- Nevýhodou SFTF je konstantní velikost délky segmentů signálu v časové oblasti.
- Otázka jak volit šířku okna
  - Pomalejší frekvence menší rozlišení v čase vyšší ve frekvencích
  - Rychlejší frekvence je vhodné rozlišovat v kratším čase
- Široké okno má tedy dobré rozlišení ve frekvenční doméně
- Úzké okno má dobré rozlišení v čase
- Problém je analogií (vyplývá s) Heisenbergova principu neurčitosti
  - Nelze současně stejně přesně určit polohu a rychlost částice

$$\Delta t \Delta \omega \geq \frac{1}{2}$$

Vlnková transformace

- V principu přidává nekonstantní šířku okna, kterým je násoben užitečný signál
  - Stále platí princip neurčitosti, ale změnou šířky okna můžeme jeho efekt snížit – zpřesnit výsledek transformace
  - Využívá vlastnosti, že rychlé frekvence trvají obvykle kratší čas, kdežto pomalé frekvence delší čas
- U STFT se provádí Fourierova transformace, zde je transformace celková, bez následné FT

Vlnková transformace (2)

- Založená na bazi vlnek
  - Krátké funkce, které tvoří okno pro přenásobení signálu
  - Různé vlnky mají různí vlastnosti – různě vhodné pro různé signály
  - Obecný předpis vlnkové transformace je:

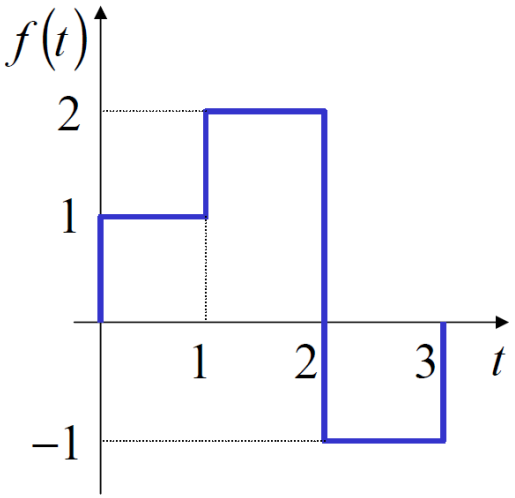
$$\mathrm{WT}(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

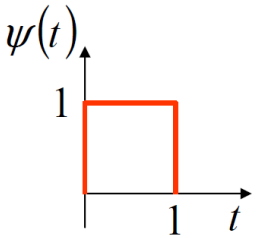
  - Obecně založena na schopnosti dekompozice signálu pomocí rozvojových koeficientů (c_i) a rozvojové funkce (množiny) ($\psi_i(t)$)

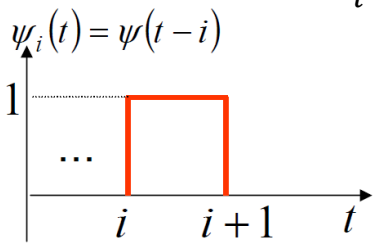
$$\mathrm{f}(t) = \sum_i c_i \psi_i(t)$$

Vlnková transformace (3)

- Příklad lineární dekompozice vektoru
  - Vektor $\vec{a} = (3, -2, 1)$
  - Ortogonální rozvojová báze v prostoru R^3 je $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$
  - Koeficienty vektoru $\vec{a}$ jsou v prostoru R^3 koordináty (3,-2,1)
  - $\vec{a} = 3(1,0,0) - 2(0,1,0) + 1(0,0,1)$
- Příklad lineární dekompozice funkce





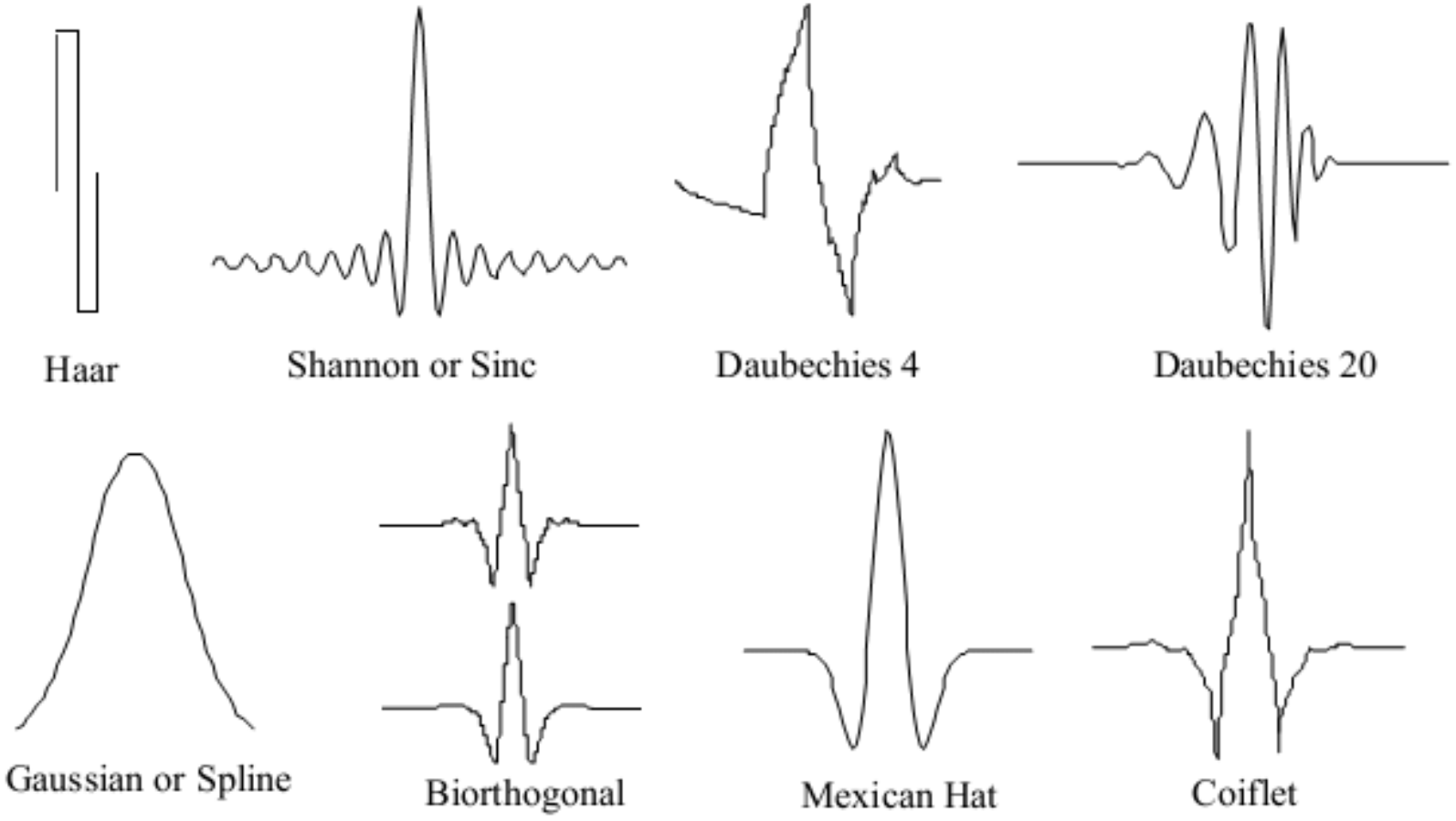


$$f(t) = \psi(t) + 2\psi(t-1) - \psi(t-1)$$
$$c_0 = 1$$
$$c_1 = 2$$
$$c_3 = -1$$
$$c_i = 0$$

Reference: David Cuesta Frau, Pattern Recognition Techniques Applied to Biomedical Signal Processing, PhD Course, Prague, 2003

Vlnková transformace (4)

- Příklady vlnek



Vlnková transformace (5)

- Vlastnosti vlnek – požadavky
  - Ne každá funkce může být vlnka
  - Existují podmínky pro použití
  - Nulová střední hodnota

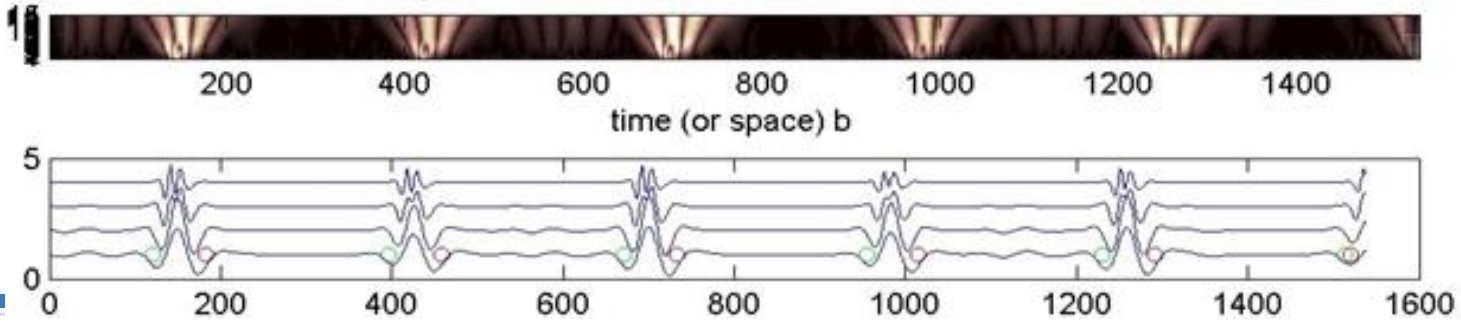
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\boldsymbol{t})\boldsymbol{dt} = 0$$

  - Vhodný frekvenční rozsah ($\boldsymbol{\Psi}(\omega)$ je Fourierova transformace $\psi(\boldsymbol{t})$)

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{|\boldsymbol{\Psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty$$

Spojitá vlnková transformace

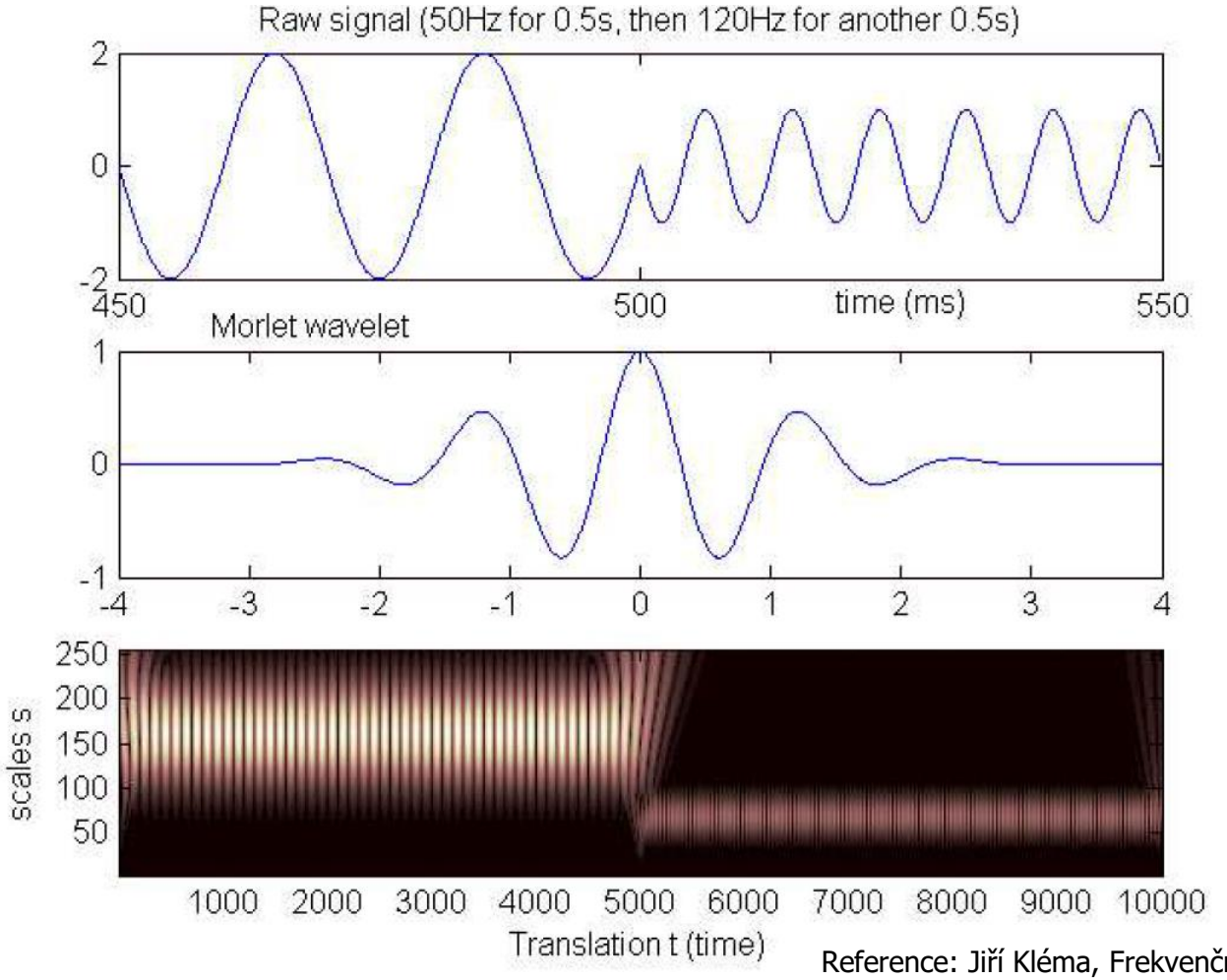
- Continuous wavelet transform (CWT)
- Založena na míře podobnosti vybrané vlnky v různých měřítcích s užitečným signálem
- Vlnka se posouvá vůči signálu v čase (translation)
- Vlnka mění své měřítko (scale), které je nepřímo úměrné frekvenci
- Vzniká množina signálů
  - Pro každé měřítko vlnky jeden podobnostní signál vlnky a užitečného signálu
- Signály jsou v digitální podobě reprezentovány vzorky
  - Realizujeme diskretizovanou CWT – vzroky nekonečného množství koeficientů spojité transformace



ČVUT
ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
ČESKÝ INSTITUT INFORMATIKY ROBOTIKY A KYBERNETIKY

Spojitá vlnková transformace (2)

- Scalogram – grafický výstup spojité vlnkové transformace



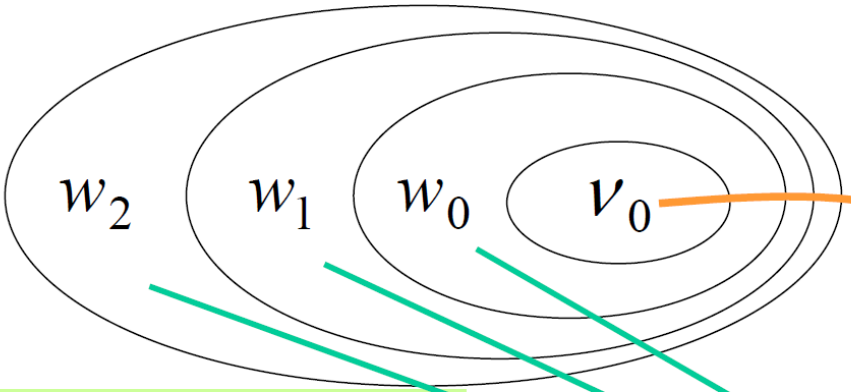
Reference: Jiří Kléma, Frekvenční a časově-frekvenční popis signálu, Gerstner laboratory, Machine Learning Group

Multirozklad

- Základem systému je multirozklad
- Vlnková funkce (mateřská vlnka)
  - Zpracovává signál do určitého měřítka – na celé spektrum by bylo potřeba nekonečně mnoho dělení
  - Od něj dále do nekonečna proto popisuje signál měřítková funkce
- Měřítková (scaling) funkce
  - Zajišťuje pokrytí celého spektra frekvencí
  - Vychází z principu, že pokud skupina funkcí signálů může být reprezentována pomocí váhované sumarizace funkcí $\varphi(t-k)$ je možné reprezentovat rozsáhlejší skupinu pomocí $\varphi(2t-k)$
- Finálně tedy využíváme vlnku (wavelet) a scaling funkci
  - Každá z částí reprezentuje část signálu z pohledu frekvencí
  - Části popsané měřítkovou funkcí se nazývají aproximace
  - Části popsané vlnkou se nazývá detail

Multiresoluční formulace

- Prostor $L^2 = v_0 \oplus w_0 \oplus w_1 \oplus w_2$
  - Hilbertův prostor - zobecnění Euklidovského prostoru na nekonečnou dimenzi



$$\psi(t) = \sum_n h_1[n]\sqrt{2}\varphi(2t-n), n \in \aleph$$

$$\psi_{jk}(t) = 2^{\frac{-j}{2}}\psi\left(2^{-j}t-k\right)$$

Mother Wavelet

$$\varphi[n] = \sum_l h[l]\sqrt{2}\varphi[2n-l], l \in Z$$

Scale Function

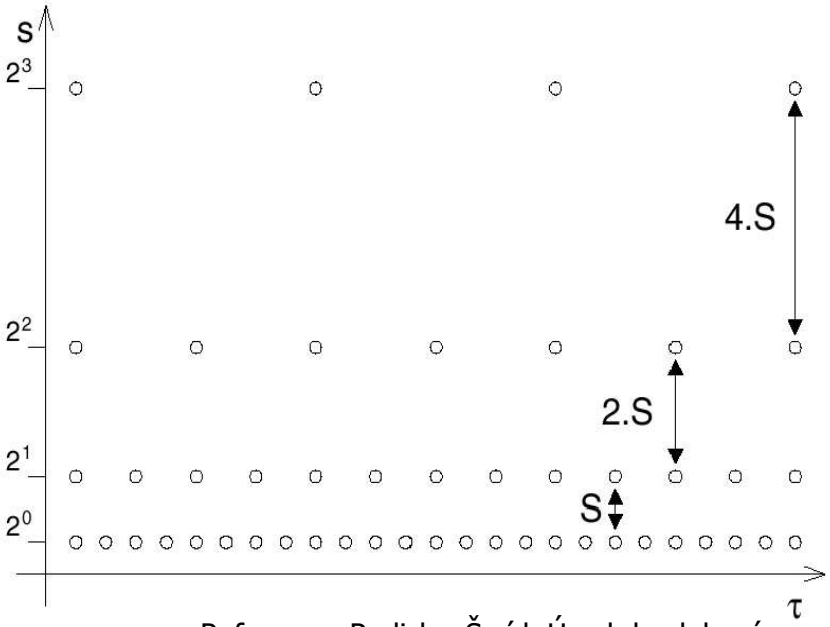
Reference: David Cuesta Frau, Pattern Recognition Techniques Applied to Biomedical Signal Processing, PhD Course, Prague, 2003

Diskrétní vlnková transformace

- Discrete wavelet transform (DWT)
- Optimalizace diskretizované CWT
  - Optimalizované vzorkování frekvenčního prostoru
  - Dyadická (dvojková) mřížka daná předpisem $s = 2^p$, $t = k2^p$, $p,k \in Z$
  - Lze najít bázi vlnek, které jsou ortogonální / ortonormální

$$DWT = c_{kp} = \sum_n f[n]\psi_{kp}[n]$$

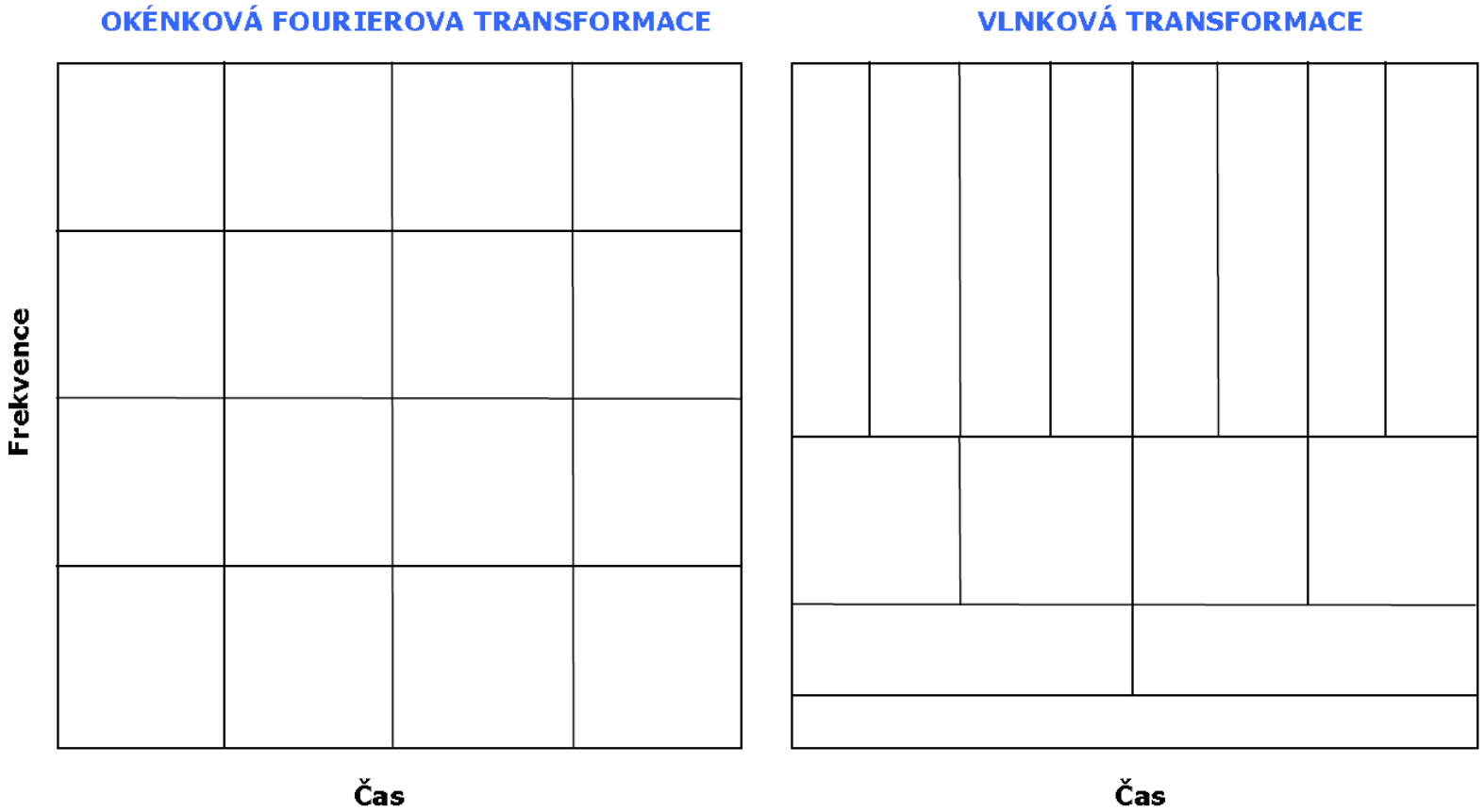
$$\psi_{kp}[n] = \frac{1}{\sqrt{2^p}}\psi\left[\frac{n - 2^p k}{2^p}\right]$$



Reference: Radislav Šmíd, Úvod do vlnkové transformace, ČVUT FEL katedra měření, Praha 2001

Diskrétní vlnková transformace

- Časové frekvenční vzorkování
  - Výsledný prostor (plocha) je stejný, ale jinak rozdělený



Reference: Jiří Kléma, Frekvenční a časově-frekvenční popis signálu, Gerstner laboratory, Machine Learning Group

Diskrétní vlnková transformace

- Transformace dělí signál na dvě části
  - Jedna je definovaná na základě scaling funkce
  - Druhá je definována na základě wavelet funkce

$$DWT(f[n]) = \begin{cases} c_k = \sum_n f[n]\varphi_k[n] \\ d_{pk} = \sum_n f[n]\psi_{pk}[n] \end{cases}$$

$$f[n] = \sum_k c_k\varphi_k(t) + \sum_p \sum_k d_{pk}\psi_{pk}(t)$$

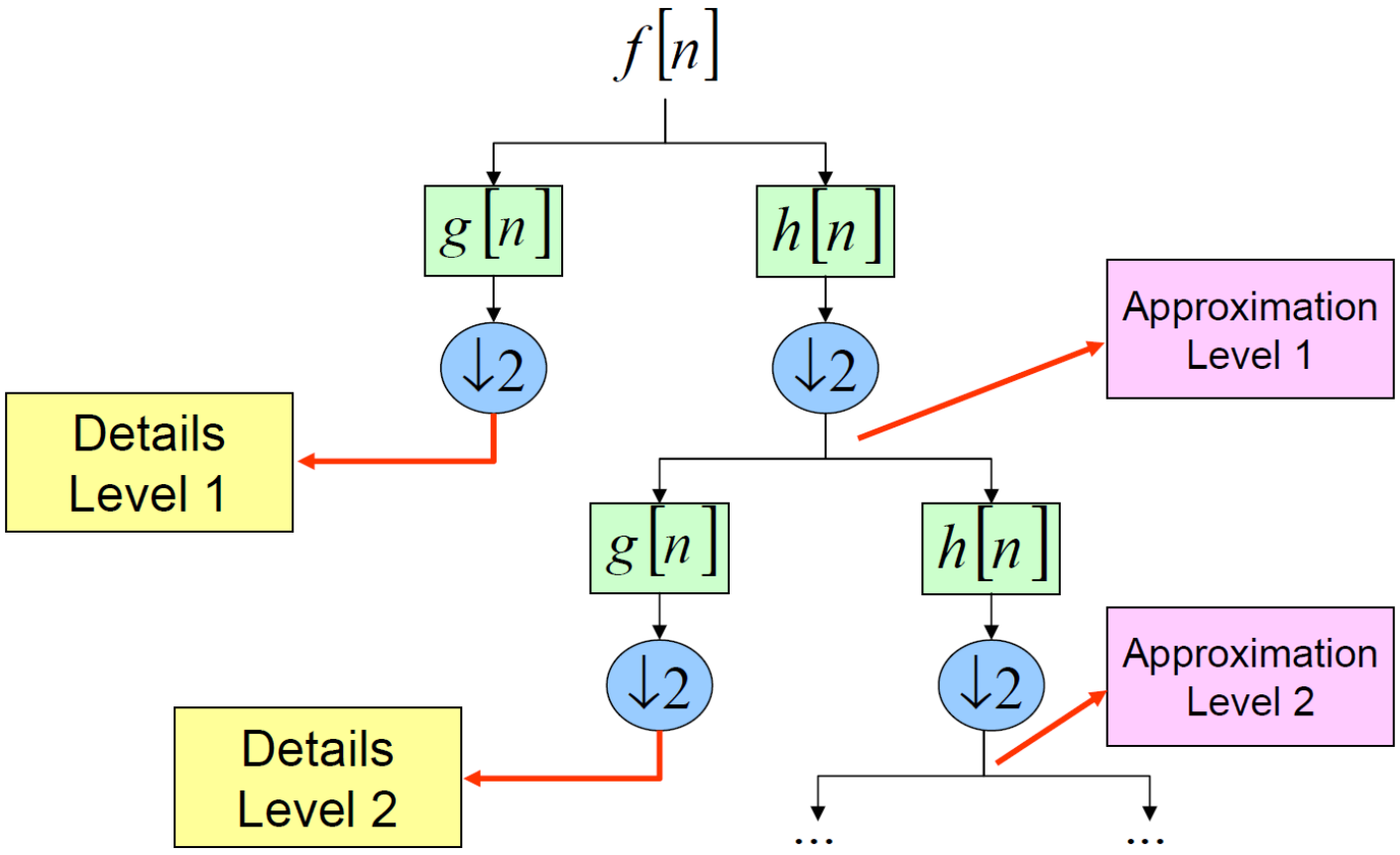
  - Signál vznikající interakcí užitečného signálu a **scaling funkce** je nazýván **aproximací**
  - Signál vznikající interakcí užitečného signálu a **vlnkové funkce** je nazýván **detailem**

Diskrétní vlnková transformace

- Vztah vlnkové transformace a filtrace signálu
  - Diskrétní vlnková transformace může být realizována pomocí postupné filtrace
  - Měřítková i vlnková funkce jsou reprezentovány jako impulzní odezvy filtrů
  - Měřítko je definováno jako počet koeficientů impulzové odezvy
  - Algoritmus postupného filtrování se nazývá pyramidový algoritmus (někdy také Mallatův algoritmus)
  - Signál je filtrován dolními a horními propustěmi
  - Po každé filtraci je signál podvzorkován na polovinu vzorků
  - Podvzorkování posune frekvence v signálu na polovinu
  - Následná filtrace tak může opět rozdělit frekvenční pásmo na polovinu
  - Signál vznikající po filtraci dolními propustěmi je aproximace (interakce s měřítkovou funkcí)
  - Signál vznikající po filtraci horní propustěmi je detail (interakce s vlnkovou funkcí)

Diskrétní vlnková transformace

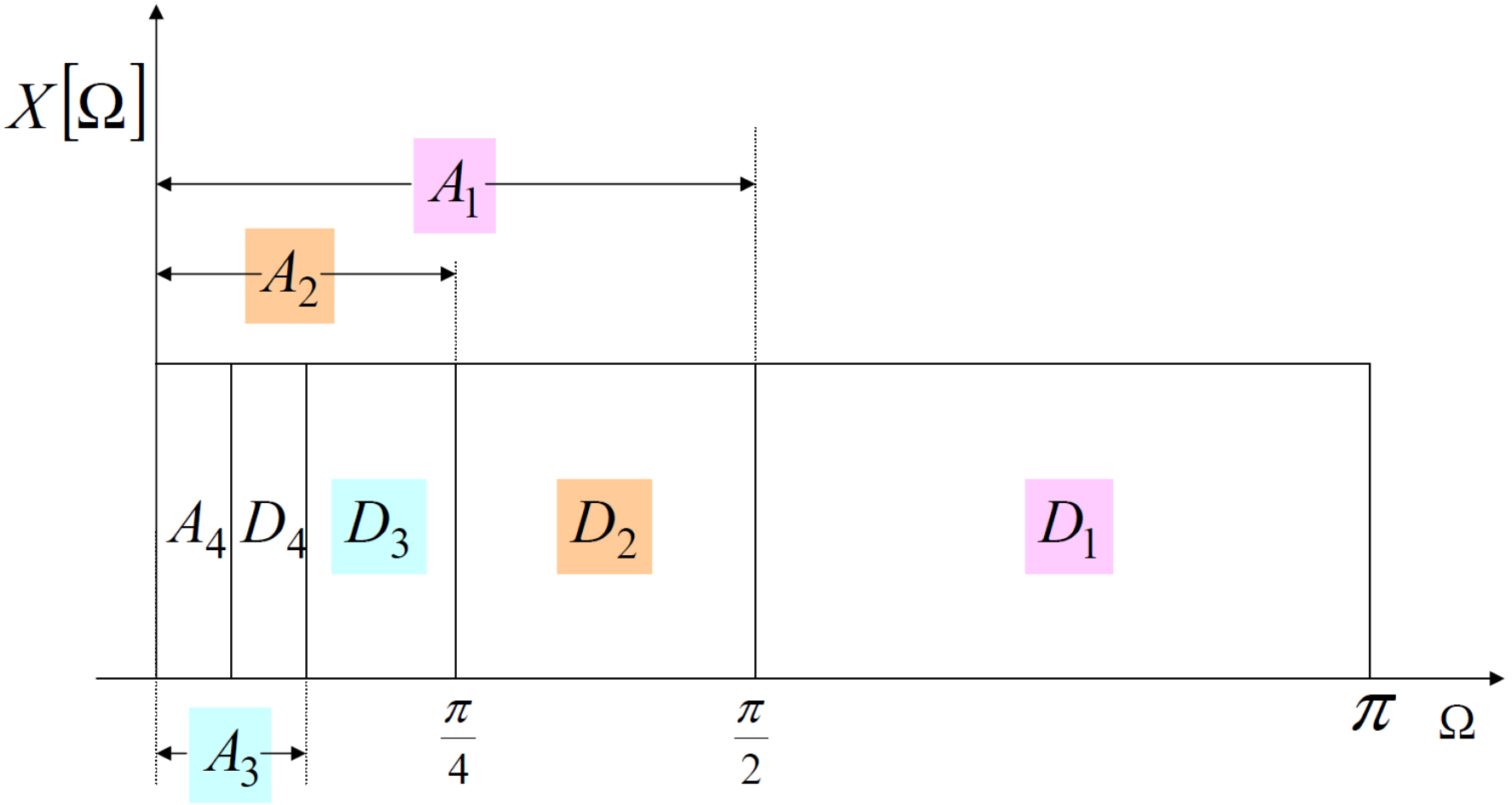
- Schema pyramidového algoritmu
  - Postupná filtrace a decimace signálu



Reference: David Cuesta Frau, Pattern Recognition Techniques Applied to Biomedical Signal Processing, PhD Course, Prague, 2003

Diskrétní vlnková transformace

- Rozložení aproximací a detailů a vztah mezi nimi

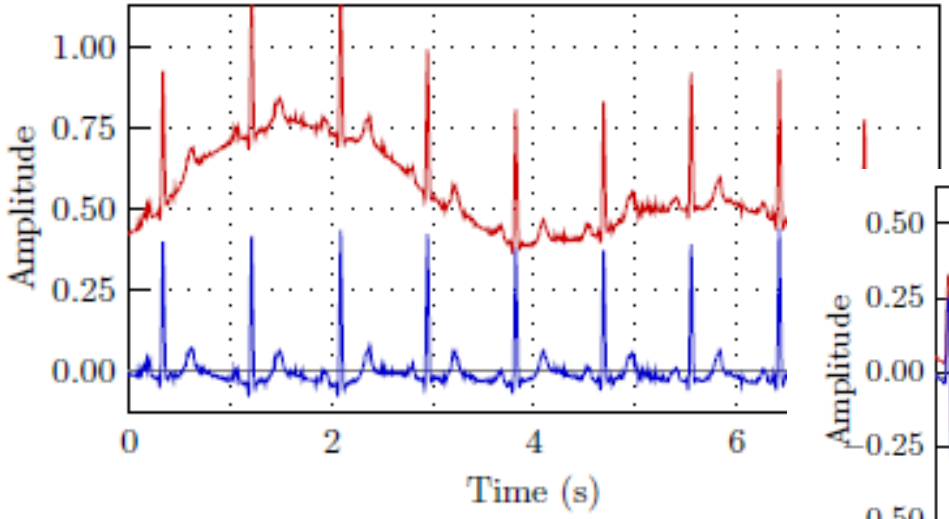


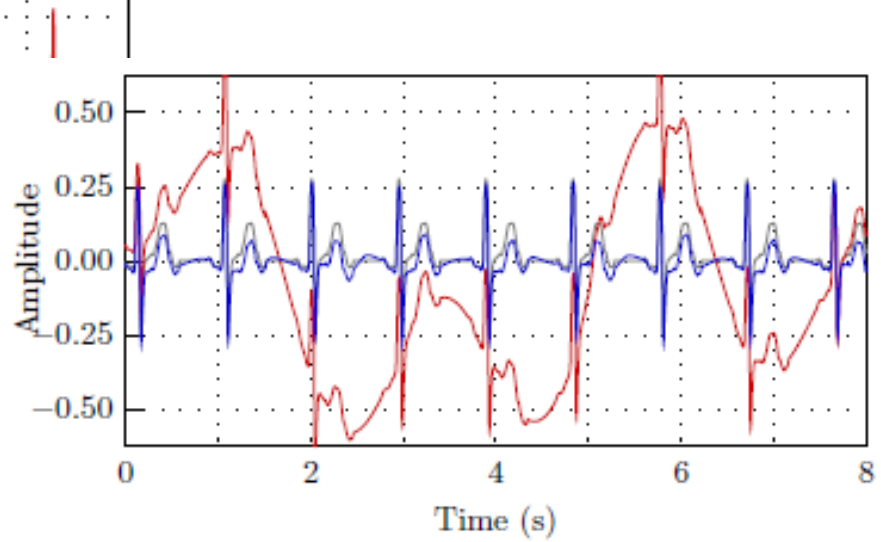
Reference: David Cuesta Frau, Pattern Recognition Techniques Applied to Biomedical Signal Processing, PhD Course, Prague, 2003

ČVUT ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
ČESKÝ INSTITUT INFORMATIKY ROBOTIKY A KYBERNETIKY

Využití DWT

- Fitrace signálu
- Využití N-té aproximace (nižší frekvence signálu)
- Odstranění dané aproximace (aproximací) ze signálu

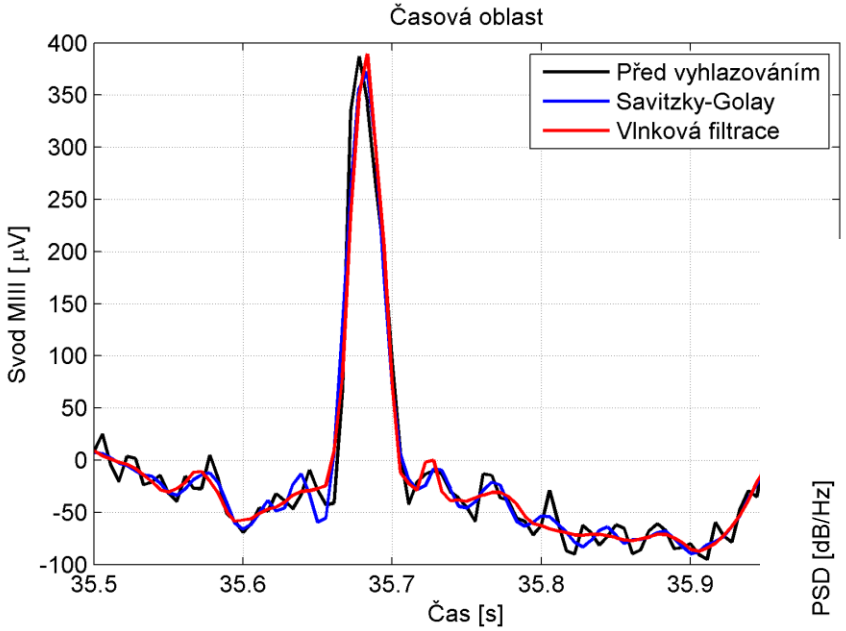


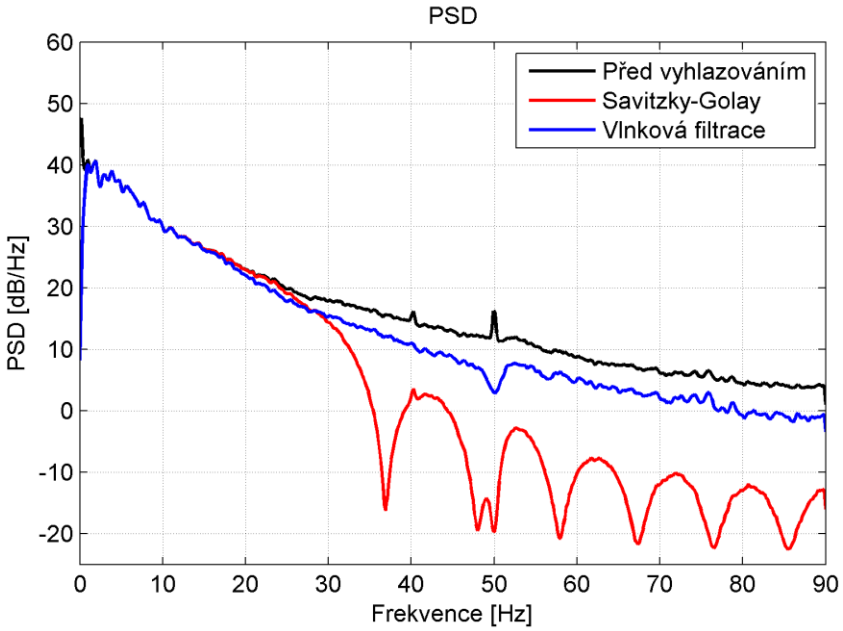


Reference: Borries, R.F. & Pierluissi, J.H. & Nazeran, Homayoun. (2005). Wavelet Transform-Based ECG Baseline Drift Removal for Body Surface Potential Mapping. Conference proceedings : ... Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society. IEEE Engineering in Medicine and Biology Society. Conference. 4. 3891-4. 10.1109/IEMBS.2005.1615311.

Využití DWT (2)

- Příklad využití pro vyhlazení signálu

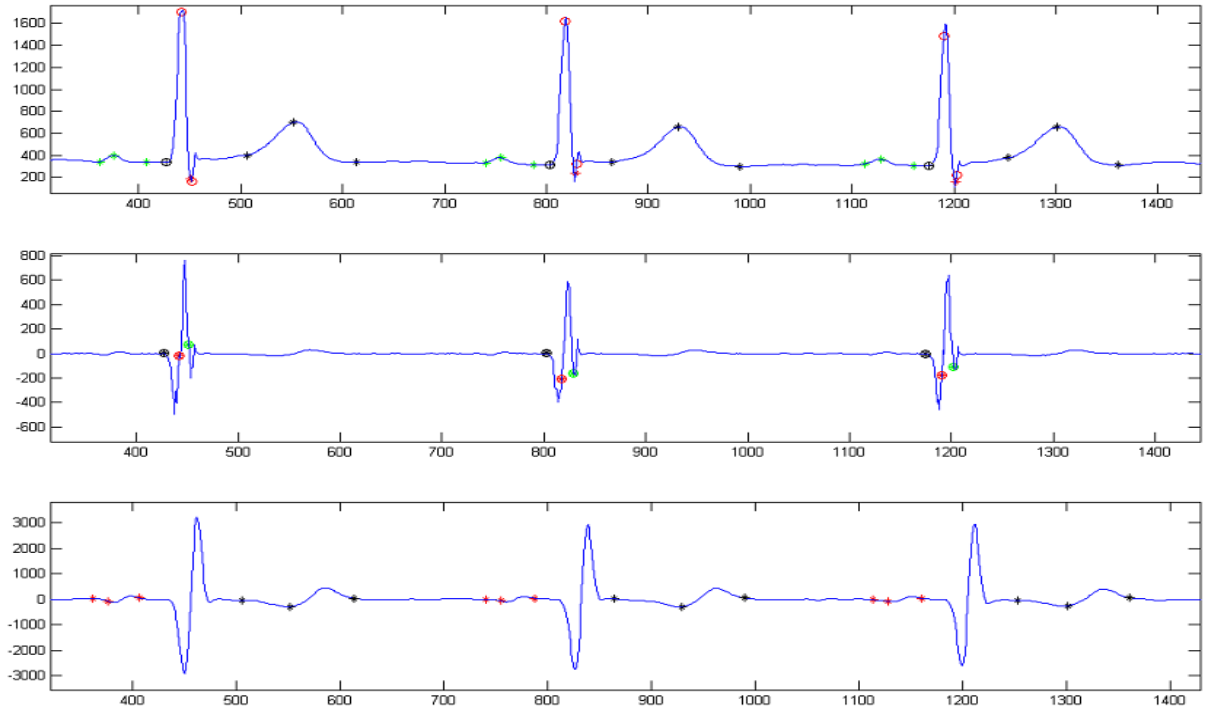




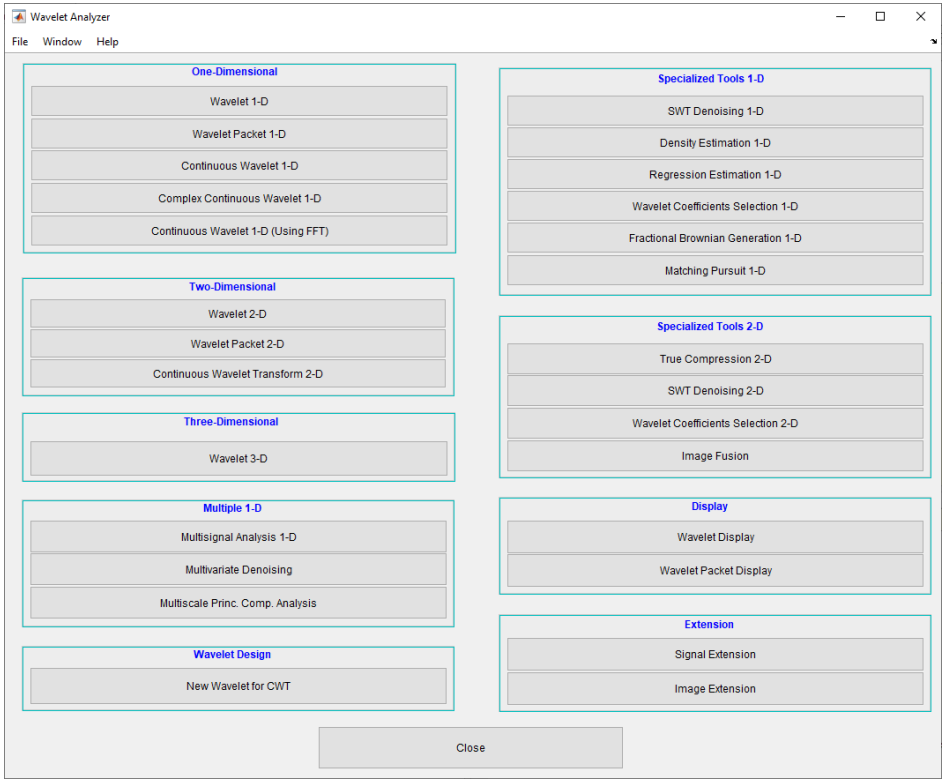
Reference: Tomáš Kaiser, Hodnocení záznamů holtrovského EKG u pacientů se srdeční amyloidózou, Diplomová práce, ČVUT FEL, 2015

Využití DWT (3)

- Příklad rozměření signálu na základě vlnkové transformace
  - Rozdělení signálu pomocí vlnkové transformace na 4 aproximace a 4 detaily
  - Detekce v 1. a 4. detailu



Reference: Michal Huptych, Předzpracování a vizualizace se zaměřením na signál EKG, Diplomová práce, ČVUT FEL, 2005

Vlnková transformace v Matlabu

- Příkazy v Matlabu jsou rozděleny pro spojitou a diskrétní transformaci
- Základním příkazem pro spojitou vlnkovou transformaci je **cwt**
- Inverzní vlnková transformace je **icwt**
- Existuje příkaz pro vytvoření banky filtrů i pro cwt – **cwtfilterbank**
- Diskrétní transformace má příkaz **dwt** a **idwt** pro inverzní transformaci
- Pro informace o vlnkách je příkaz **waveinfo**
- V rámci GUI má Matlab příkaz **waveletAnalyzer**