



Digitální filtrace

Analýza signálů I

ZS 2023/2024

Michal Huptych

5. 12. 2023

Přehled literatury



- Knihy a skripta
 - Robert Vích, Zdeněk Smékal: Číslicové filtry, Academia, 2000
 - Vratislav Davídek, Miloš Laipert, Miroslav Vlček: Analogové a číslicové filtry, Vydavatelství ČVUT, 2000
 - Mohamed Najim: Digital Filters Design for Signal and Image Processing, Wiley-ISTE, 2006

Zesílení a útlum



■ Zesílení

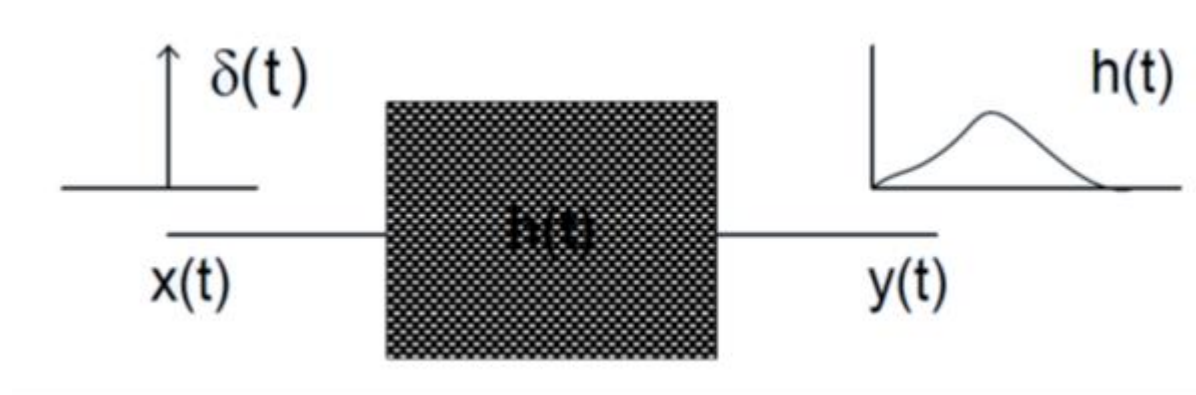
- Proces zvětšení amplitudy signálu (napěťové, proudové, atd.)
- Udáváno buď bezrozměrně nebo v dB

$$A_U = \frac{U_{výstupní}}{U_{vstupní}} [-]; \quad A_U = 20 \log \frac{U_{výstupní}}{U_{vstupní}} [dB]$$

■ dB

- původně útlumu telefonního vedení, akustika
- logaritmická stupnice (podle vnímání sluchu)
- není jednotkou v rámci SI
- Častokrát spojení 3 dB zesílení, resp. 3 dB útlum
 - Proč?
 - U **výkonu** jsou -3 dB pokles výkonu na polovinu, +3 dB jsou zvýšení výkonu na dvojnásobek (u výkonu je vzorec $10 \log(P/P_0)$)

LTI systémy



- Lineární časově invariantní systémy
 - Daný vstupní signál $x(t)$ způsobí na výstupu odezvu $y(t)$
 - Linearita: platí princip superpozice $x_1(t) + x_2(t) = y_1(t) + y_2(t)$
 - Časová invariantnost: platí $x(t-t_0) \rightarrow y(t-t_0)$
- Předpoklady
 - Kauzalita
 - Stabilita

Konvoluce

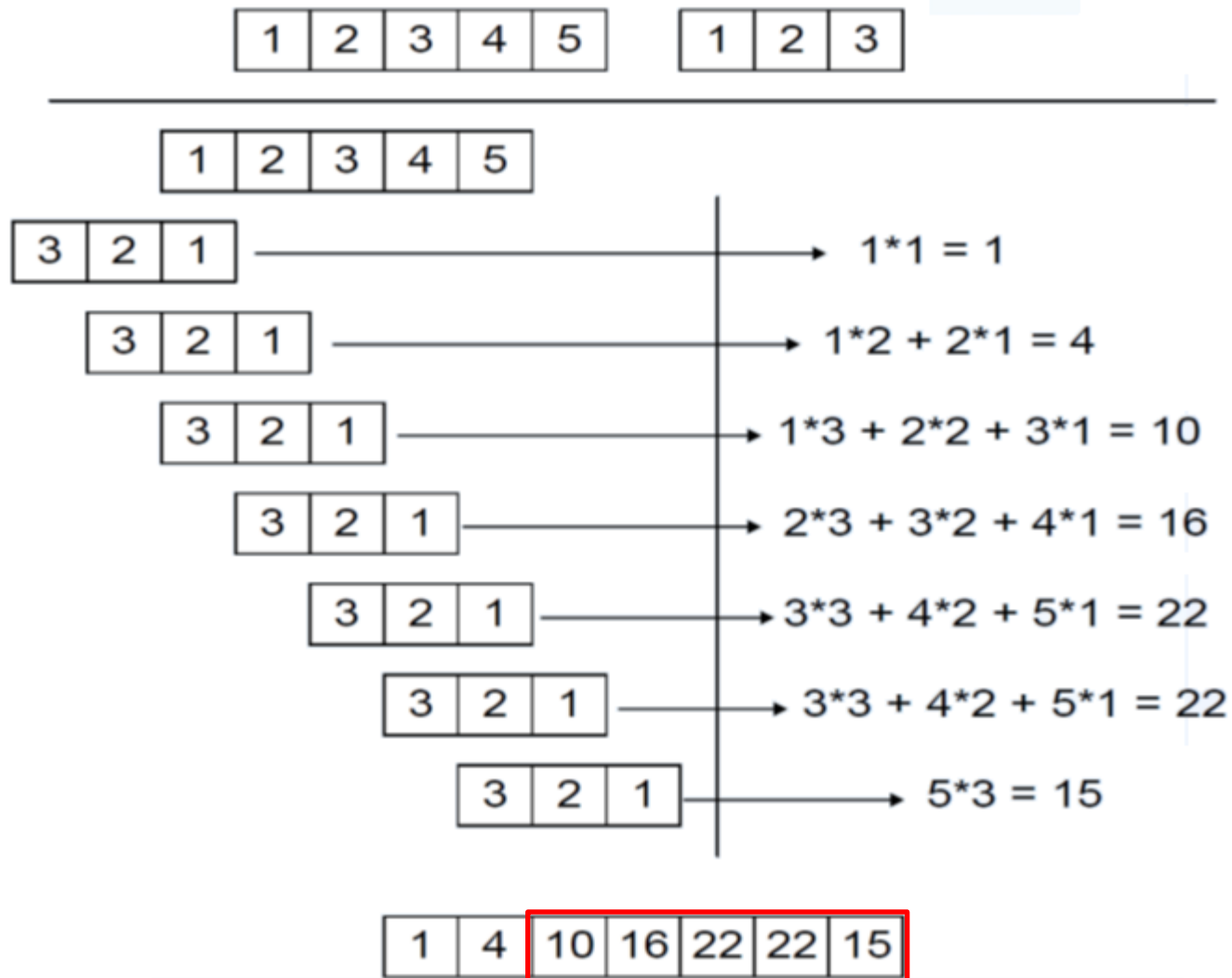


- Základní předpis

$$y(t) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau, \quad y(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)h(k-i)$$

- Kauzalita
 - $h(t) = 0$ pro $t < 0$
- Stabilita
 - $h(t) \rightarrow 0$ pro $t \rightarrow \infty$
- Matematické vlastnosti
 - komutativní: $a*b = b*a$
 - Asociativní: $(a*b)*c = a*(b*c)$
 - distributivní: $a*b + a*c = a*(b + c)$

Konvoluce



Popis systému



- Diferenční rovnice

$$y(n) = B_0x(n) + B_1x(n - 1) + \dots + B_Mx(n - M)$$

- Impulsní odezva (LTI systémy)

- Odezva na Dirakovův impuls (jednotkový skok)

$$h(n) = B_0\delta(n) + B_1\delta(n - 1) + \dots + B_M\delta(n - M)$$

$$h(n) = \{B_0, B_1, B_2, \dots, B_M\}$$

Kauzalita a stabilita



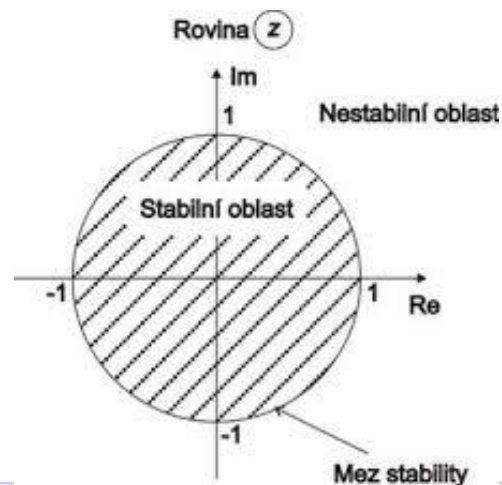
- Kauzalita

$y(n) + y(n-1) + \dots + y(n-N) = x(n+M)$ - kazální pro $M \leq 0$

$y(k+N) + y(k+N-1) + \dots + y(n) = x(k+M)$ - kazální pro $M \leq N$

- Asymptotická definice stability

- vlastní čísla systému definovaná algebraickou rovnicí $\det(\lambda I - A) = 0$ leží uvnitř jednotkové kružnice, jejíž střed prochází počátkem komplexní roviny



Fourierova transformace



- Základním matematickým aparátem pro převod z časové oblasti do frekvenční je Fourierova transformace

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt = s(t) \cdot (\cos(\omega t) - j \cdot \sin(\omega t))$$

- Vztah ke konvoluci

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt; H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt$$

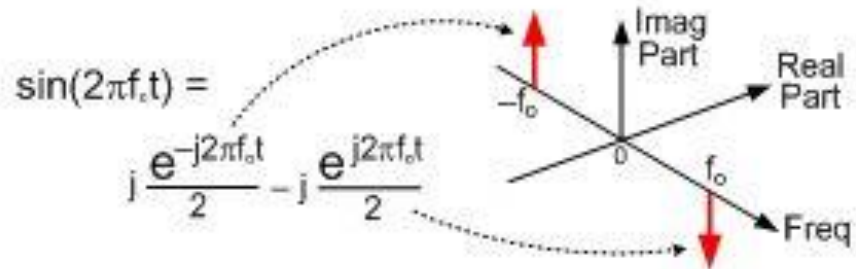
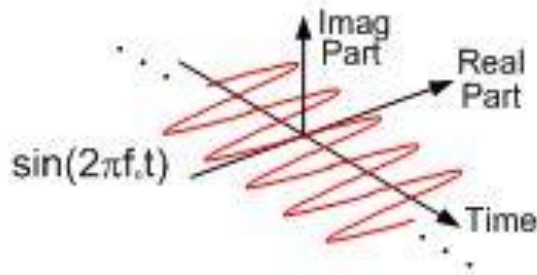
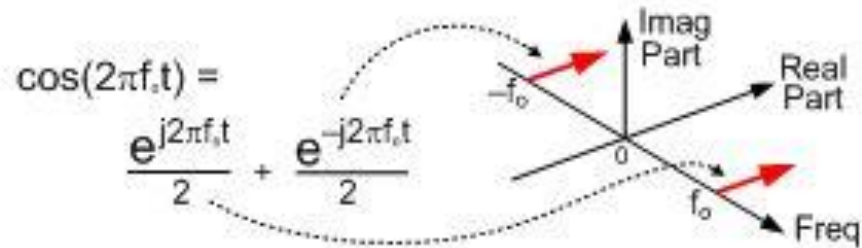
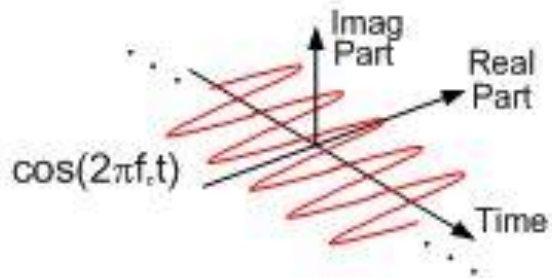
$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

Fourierova transformace



- Převod z časové oblasti do oblasti frekvenční



Reference: Rick Lyons, A Quadrature Signals Tutorial: Complex, But Not Complicated, 2013, dostupné na: <https://www.dsprelated.com/showarticle/192.php>

- Nevýhodou je ztráta časové informace



- Část záznamu (biosignálu či obrazového signálu), která nemá fyziologický původ ve vyšetřovaném orgánu
 - ◆ technické artefakty - především při zpracování bioelektrických signálů
 - ◆ elektrostatické potenciály,
 - ◆ rušení elektrorozvodnou sítí,
 - ◆ impulsní rušivé signály,
 - ◆ rušivá elektromagnetická pole
 - ◆ šum elektronických prvků a obvodů
 - ◆ biologické artefakty
 - ◆ artefakty specifické pro jednotlivé vyšetřovací metody - zcela jiné artefakty se vyskytují např. u zobrazovacích metod, nebo při měření neelektrických biosignálů, jako jsou krevní tlak či tělesná teplota
 - ◆ pohybové artefakty,
 - ◆ artefakty vznikající vzájemným vlivem různých orgánů
 - ◆ artefakty dané biologickými rytmy



- Filtrace = rozdělení signálu na základě jeho frekvenčních složek na propustné a nepropustné pásmo

$$y(t) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau, \quad y(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)h(k-i)$$

- Systém implementující funkci filtrace se nazývá **filtr**
- Filtrace je jednou z nejpoužívanějších operací v signálovém zpracování
- Za jistých podmínek je filtrace procesem, která propouští dané frekvenční pásmo s minimálními deformacemi

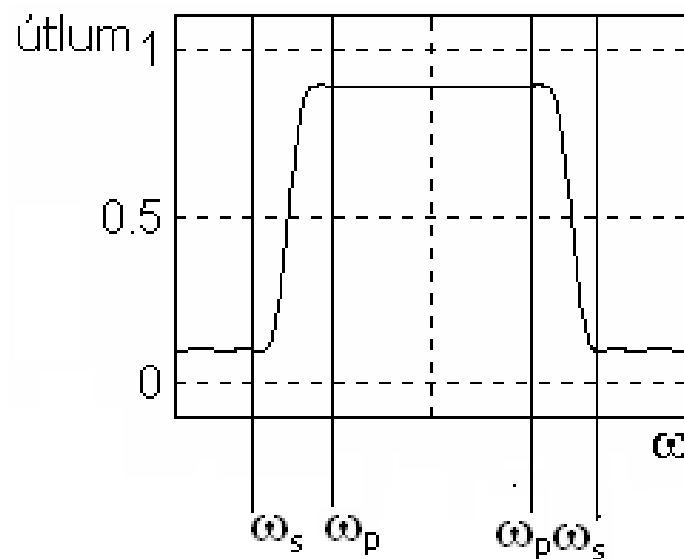
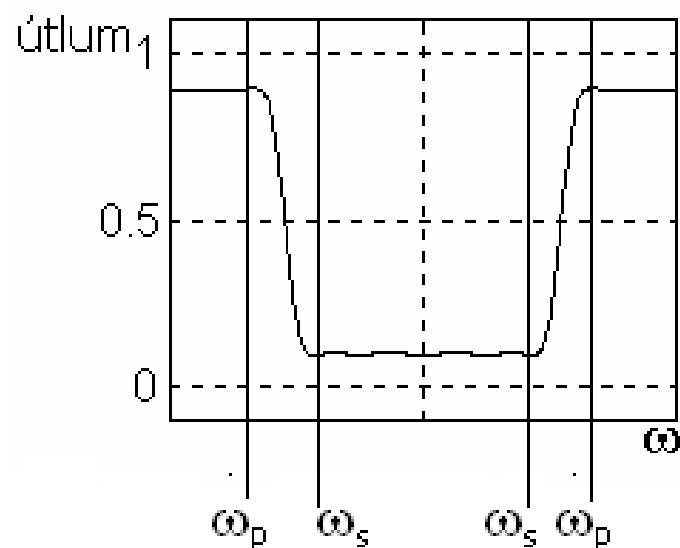
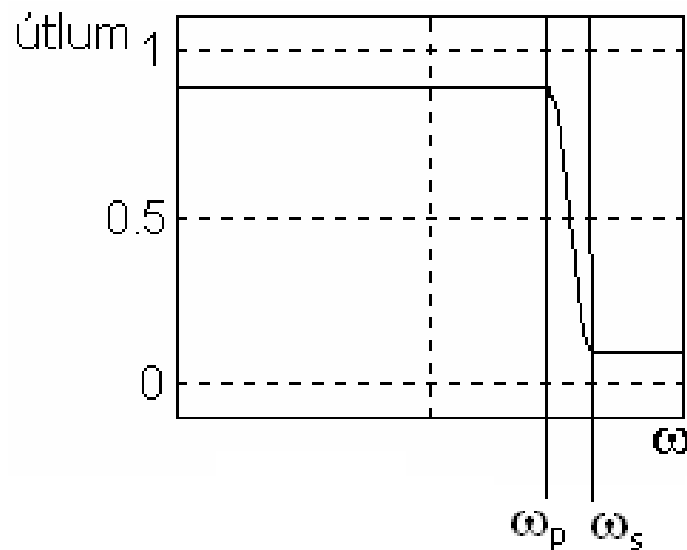
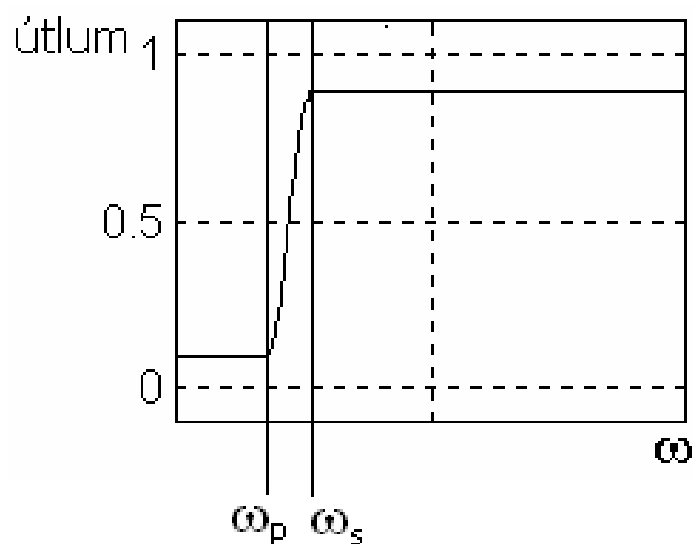
Typy filtrů



- Podle funkce
 - dolní propust (DP)
 - horní propust (HP)
 - pásmová propust (PP)
 - pásmová zadrž (PZ)
- Podle impulzové odezvy
 - FIR filtry (finite impulse response)
 - IIR filtry (infinite impulse response)
- Podle typu zpracování
 - analogové filtry (odpor, kondenzátor, cívka)
 - číslicové filtry (signálové procesory, PC)



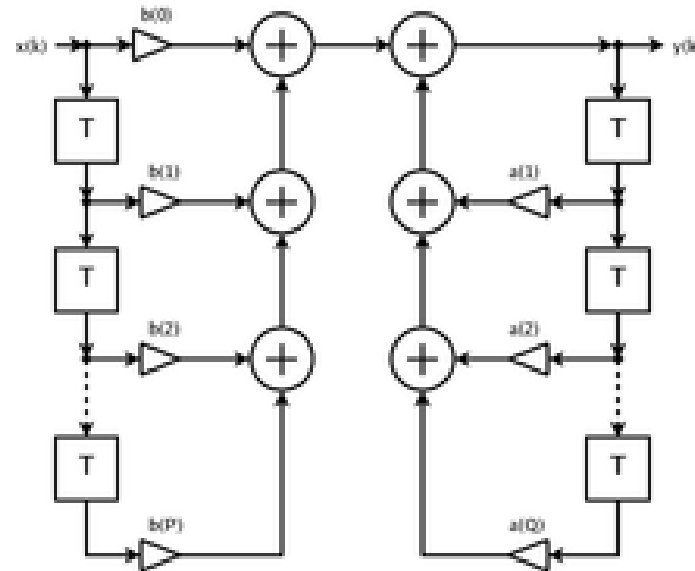
Typy filtrů podle funkce



Filtry typu IIR



- Základní uspořádání



Zdroj obrázku: -

https://en.wikipedia.org/wiki/Infinite_impulse_response

- Přenosová funkce

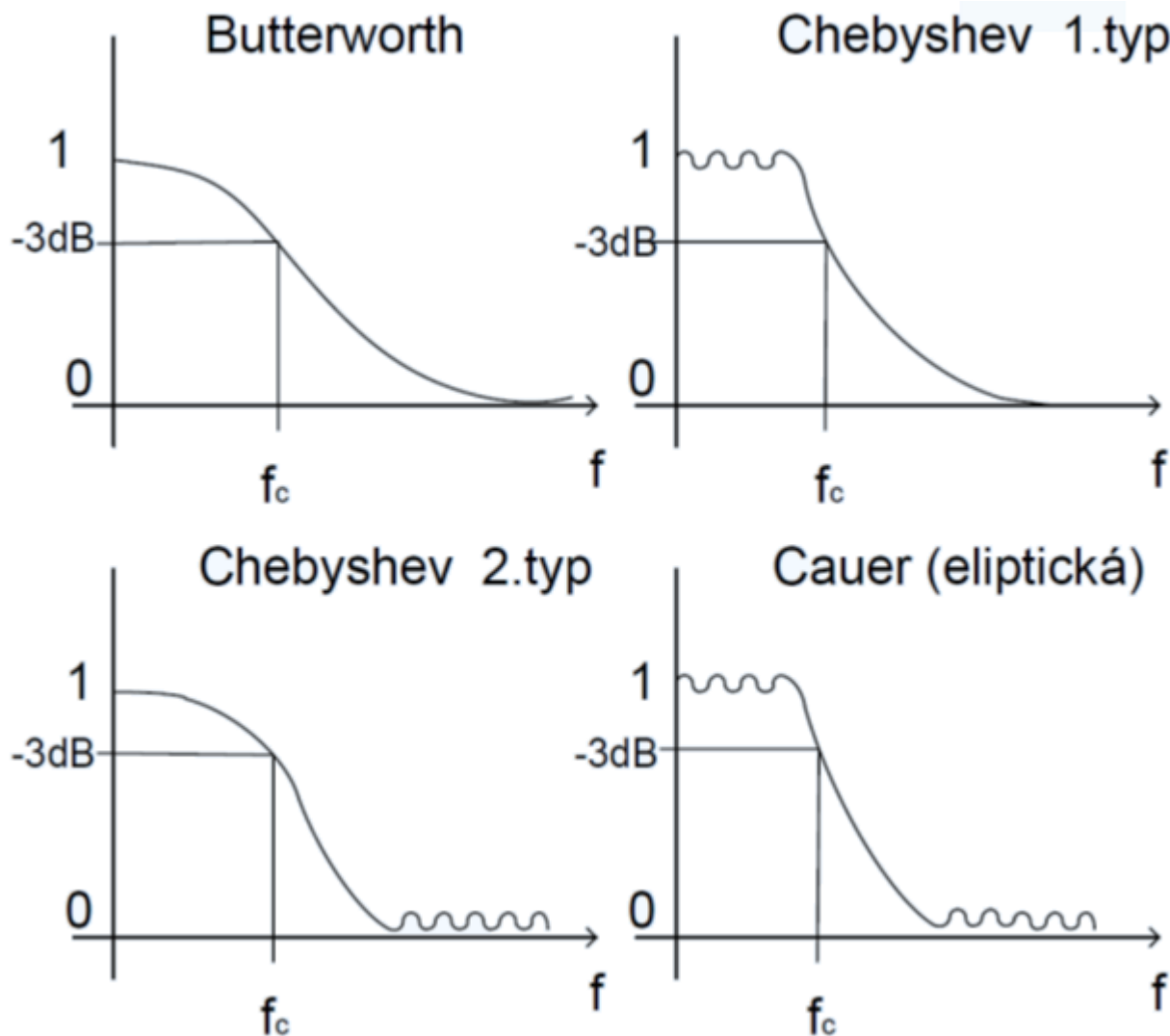
$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b(n)z^{-n}}{1 + \sum_{m=1}^M a(m)z^{-m}} = \frac{b(0) + b(1)z^{-1} + b(2)z^{-2} + \dots + b(N)z^{-N}}{1 + a(1)z^{-1} + a(2)z^{-2} + \dots + a(M)z^{-M}}$$

Filtry typu IIR - návrh

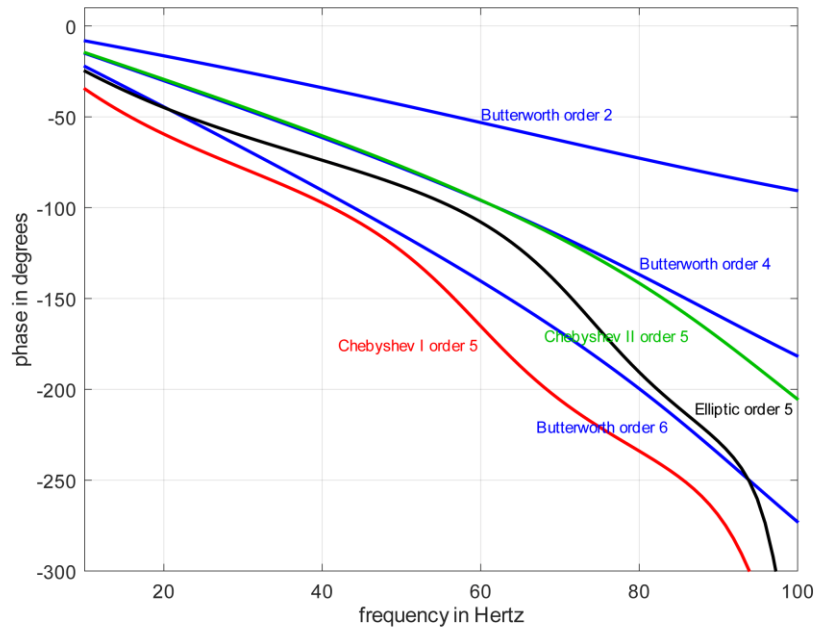
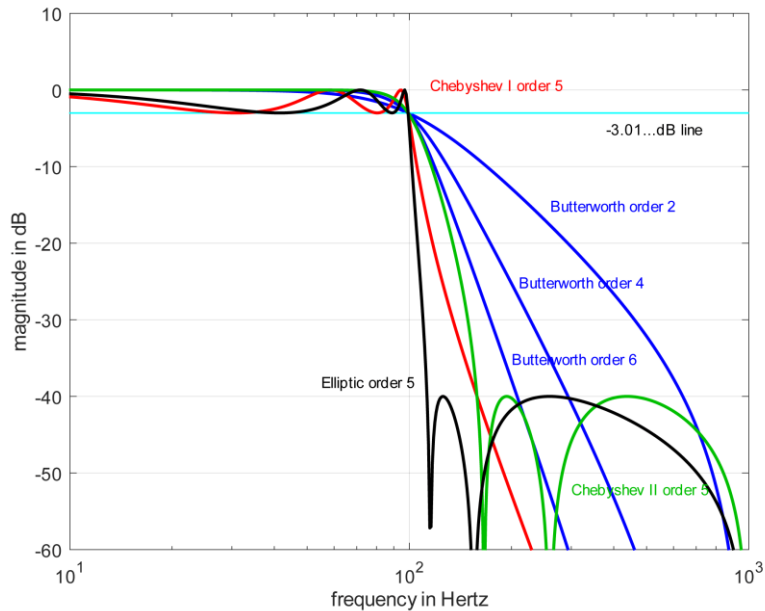


- Nejčastěji se při návrhu vychází z návrhu filtrů analogových
 - metody bilineární transformace nebo invariance impulsní odezvy
 - používá aproximací pro stanovení řádu a parametrů filtru
- Typy aproximací:
 - Butterworth
 - nezvlněn, málo nelineární fáze, potřeba vyšší řády
 - Chebyshev
 - zvlnění v propustném nebo nepropustném pásmu, vyšší nelinearita fáze, větší strmost, nižší řády
 - Cauer
 - zvlnění v obou pásmech, největší nelinearita fáze, nejvyšší strmost, potřeba nejnižších řádů

Filtry typu IIR - návrh



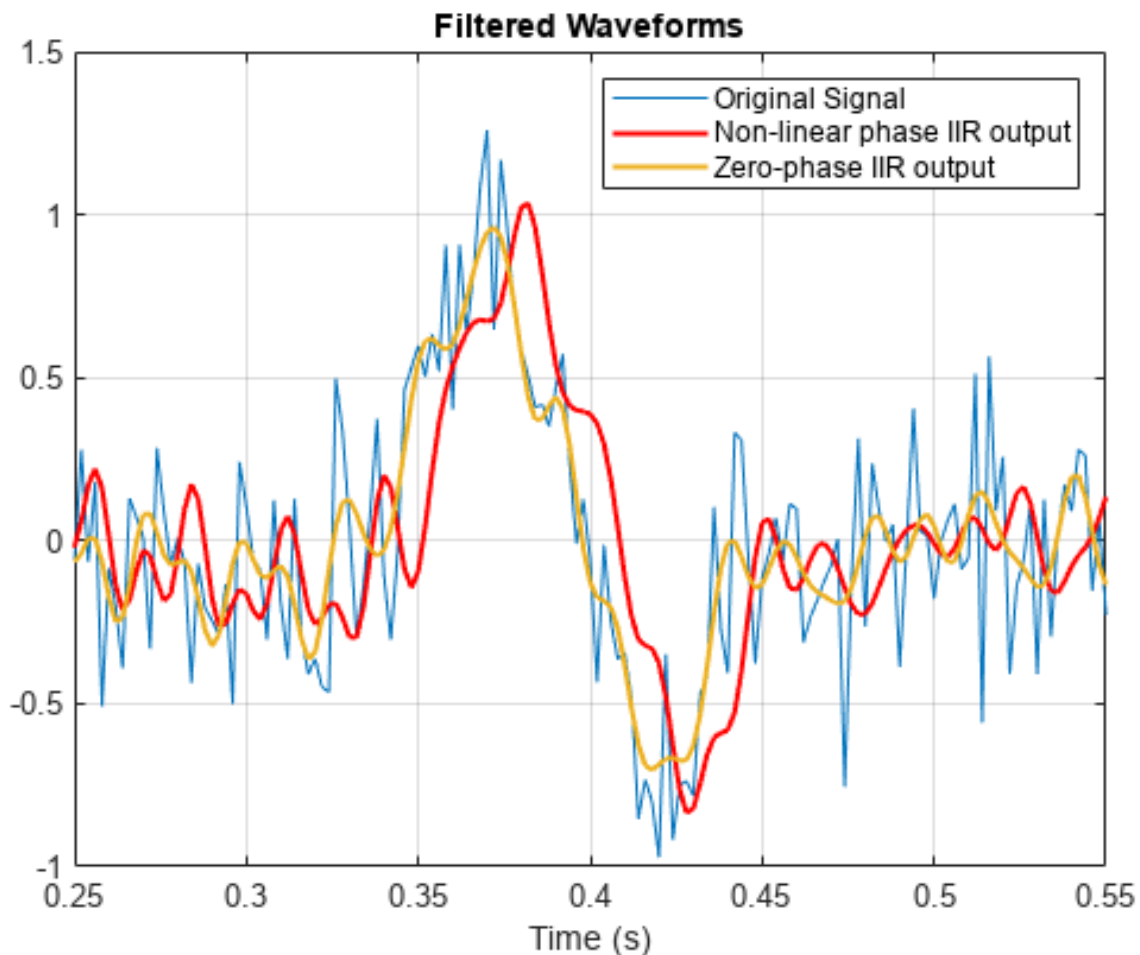
Amplituda a fáze filtru



Zdroj:

<https://vru.vibrationresearch.com/lesson/phase-response/>

Efekt nelineární fáze



Zdroj: <https://www.mathworks.com/help/signal/ug/practical-introduction-to-digital-filtering.html>

Filtry typu IIR



- Filtry typu IIR nemají lineární fázi
 - nelze dosáhnout stejného skupinového zpoždění pro všechny frekvenční složky signálu
 - vede k morfologické deformaci filtrovaného signálu v časové oblasti
 - existují metoda aproximace s maximálně plochým skupinovým zpožděním – řádově náročnější než metoda analogie
- Podmínky stability IIR filtru
 - dáno póly systému
 - modul všech pólů musí být menší než jedna
 - obecně jmenovatel přenosové funkce nesmí být nula
 - póly musí ležet v uvnitř jednotkové kružnice v rovině z

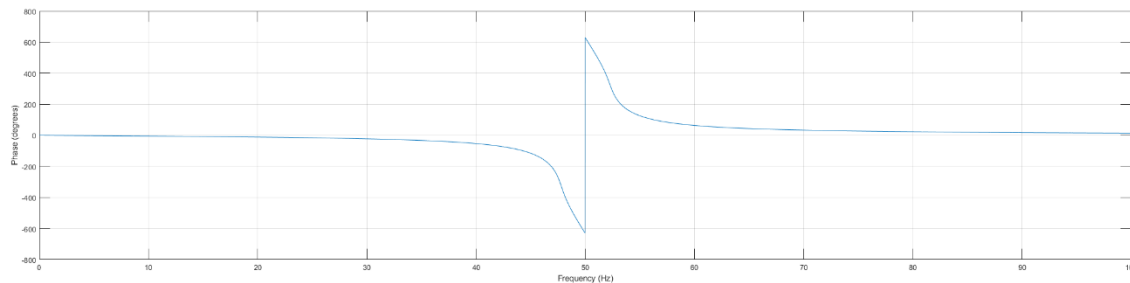
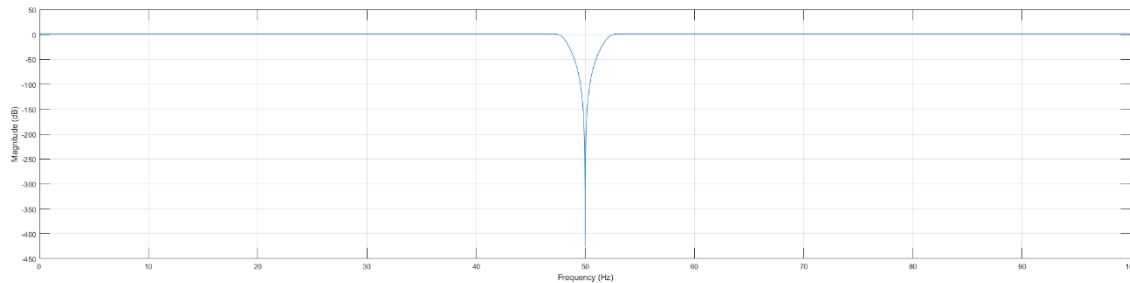
Filtry typu IIR



- Rekurzivní filtr N-tého řádu - ARMA filter

$$y(n) + A_1y(n - 1) + \dots + A_Ny(n - N) = B_0x(n) + B_1x(n - 1) + \dots + B_Mx(n - M)$$

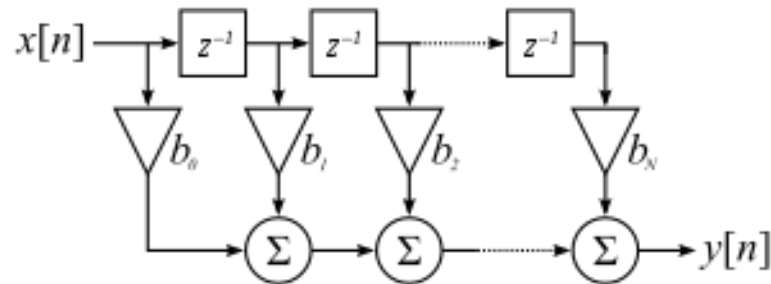
- Specifickým příkladem IIR filtru je notch filter



Filtry typu FIR



- Základní uspořádání



Zdroj obrázku: -

https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_impulse_response

- Přenosová funkce

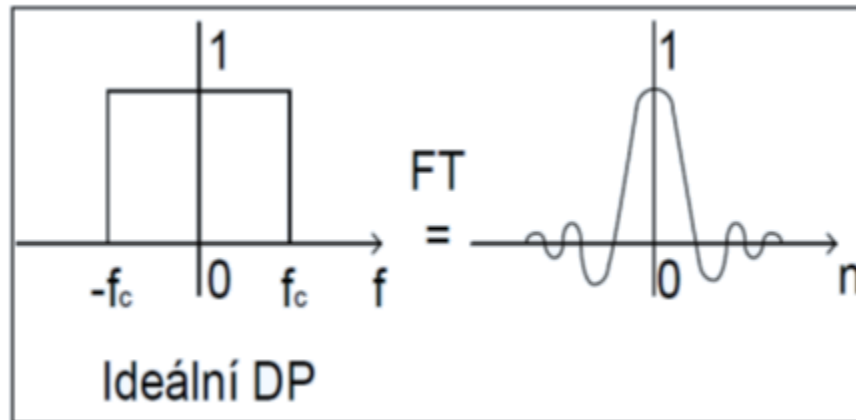
$$H(z) = \sum_{n=0}^N b(n)z^{-n} = b(0) + b(1)z^{-1} + b(2)z^{-2} \dots b(N)z^{-N}$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^N b(n)e^{-j\omega n} = b(0) + b(1)e^{-j\omega} + b(2)e^{-j2\omega} \dots b(N)e^{-jN\omega}$$

Filtry typu FIR - návrh



- Návrh vychází z ideální DP

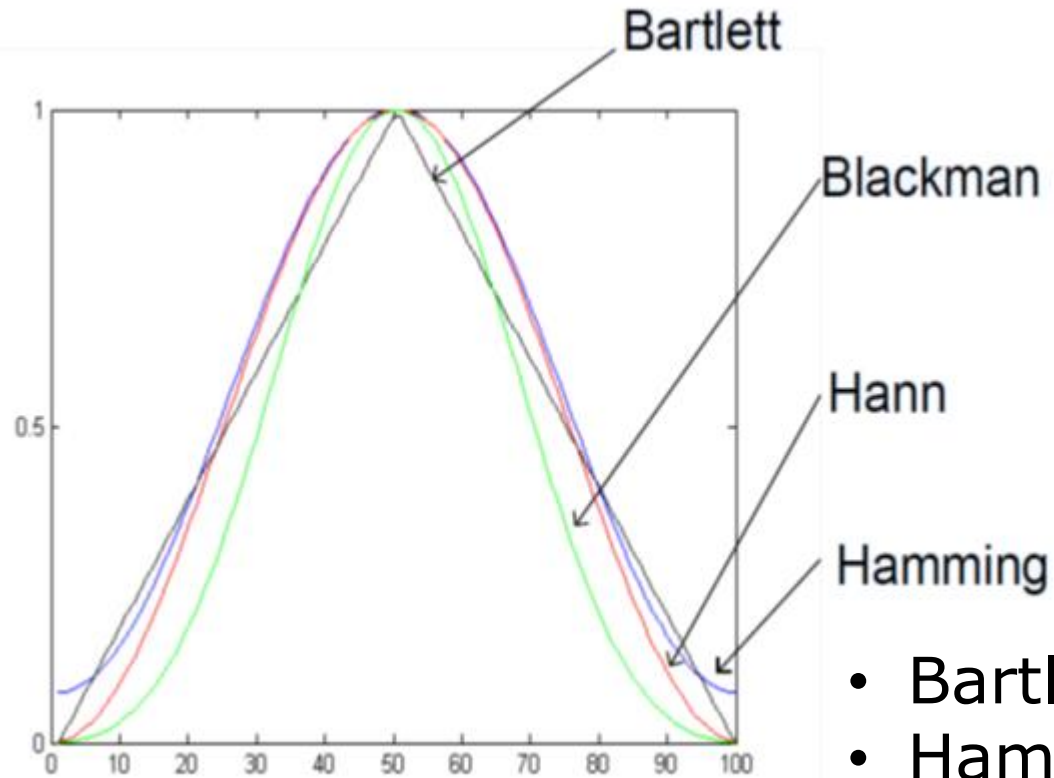


- Metoda oken a Fourierových řad
 - Zkrácení $h[n]$ - volba počtu koeficientů
 - počet koeficientů = řád filtru + 1
 - posunutí o M vzorků doprava – kauzální (realizovatelný) filtr

Filtry typu FIR - návrh



- Přehled některých častých oken



- Bartlett – 12 dB
- Hamming – 24 dB
- Hann – 45 dB
- Blackman – 60 dB

Přehled některých častých oken



Name of Window	Time-domain sequence of window $w(n)$, $0 \leq n \leq N-1$
Rectangular Window	1
<u>Barlett</u> (triangular) window	$1 - \frac{2 n - \frac{N-1}{2} }{N-1}$
Blackman Window	$0.42 - 0.5\cos\frac{2\pi n}{N-1} + 0.08\cos\frac{4\pi n}{N-1}$
Hamming Window	$0.54 - 0.46\cos\frac{2\pi n}{N-1}$
<u>Hanning</u> Window	$\frac{1}{2}(1 - \cos\frac{2\pi n}{N-1})$
Kaiser Window <i>$I_0(x)$ is the zeroth order Besselfunction.</i>	$\frac{I_0[\alpha\sqrt{(\frac{N-1}{2})^2 - (n - \frac{N-1}{2})^2}]}{I_0[\alpha(\frac{N-1}{2})]}$

Zdroj: <http://vlabs.iitkgp.ernet.in/dsp/exp8/index.html#>

Filtry typu FIR

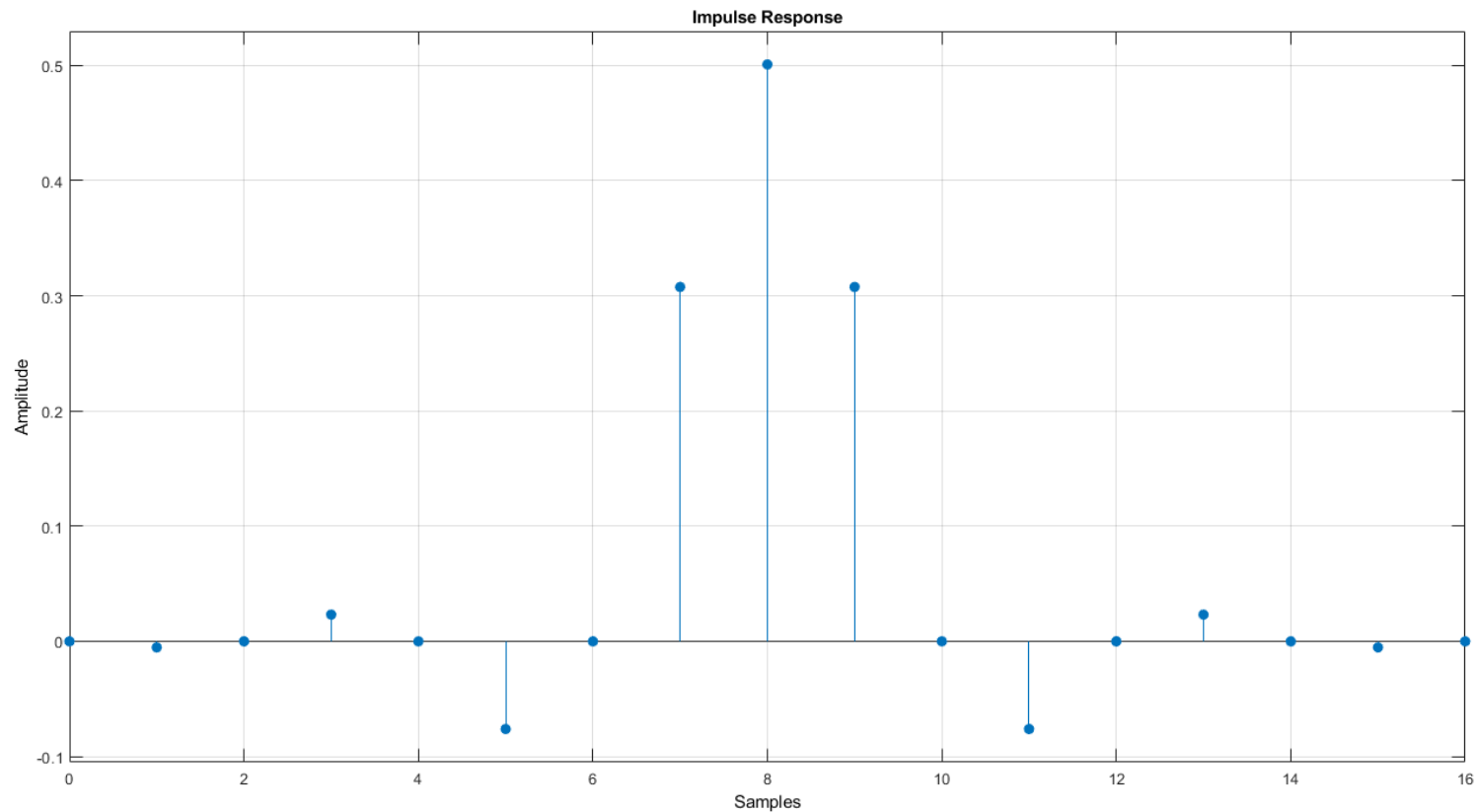


- Filtry typu FIR mají lineární fázi jestliže je impulzová odezva
 - Se sudou symetrií: $h(n) = h(N - 1 - n)$ pro $0 \leq n \leq N - 1$
 - s osou symetrie $(N - 1)/2 \rightarrow$ FIR typu 1
 - s osou symetrie mezi vzorky $(N-2)/2$ a $N/2 \rightarrow$ FIR typu 2
 - S lichou symetrií: $h(n) = -h(N - 1 - n)$ pro $0 \leq n \leq N - 1$
 - s osou symetrie $(N - 1)/2 \rightarrow$ FIR typu 3
 - s osou symetrie mezi vzorky $(N - 2)/2$ a $N/2 \rightarrow$ FIR typu 4
- Lineární fáze znamená konstantní skupinové zpoždění
 - Velmi důležitá vlastnost filtru
 - Všechny kmitočtové složky v přenášení signálu se dostanou na výstup se stejným zpožděním
- Filtry typu FIR jsou vždy stabilní

Filtr FIR typu 1



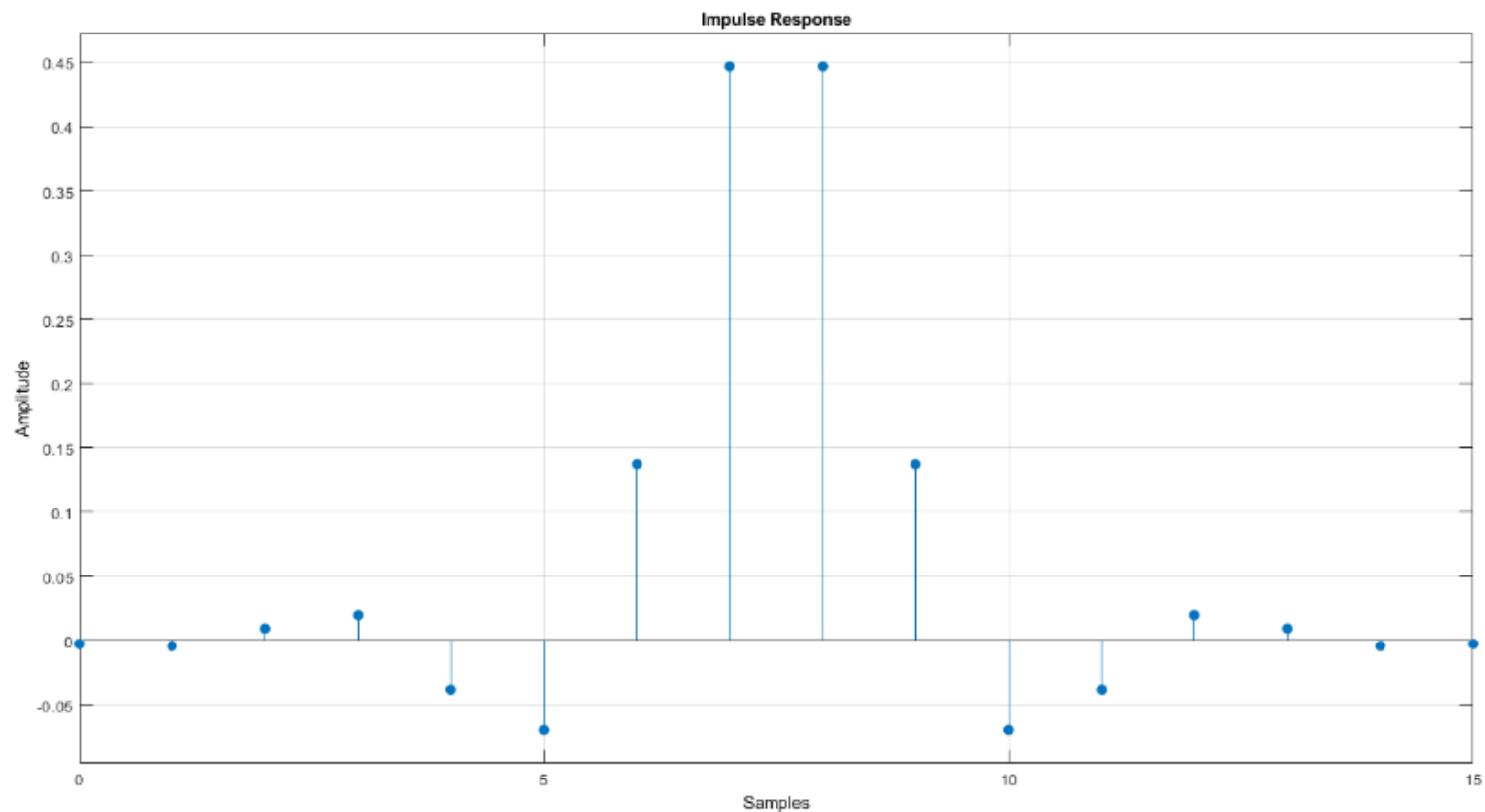
- sudá symetrie: $h(n) = h(N - 1 - n)$ pro $0 \leq n \leq N - 1$
s osou symetrie $(N - 1)/2$



Filtr FIR typu 2



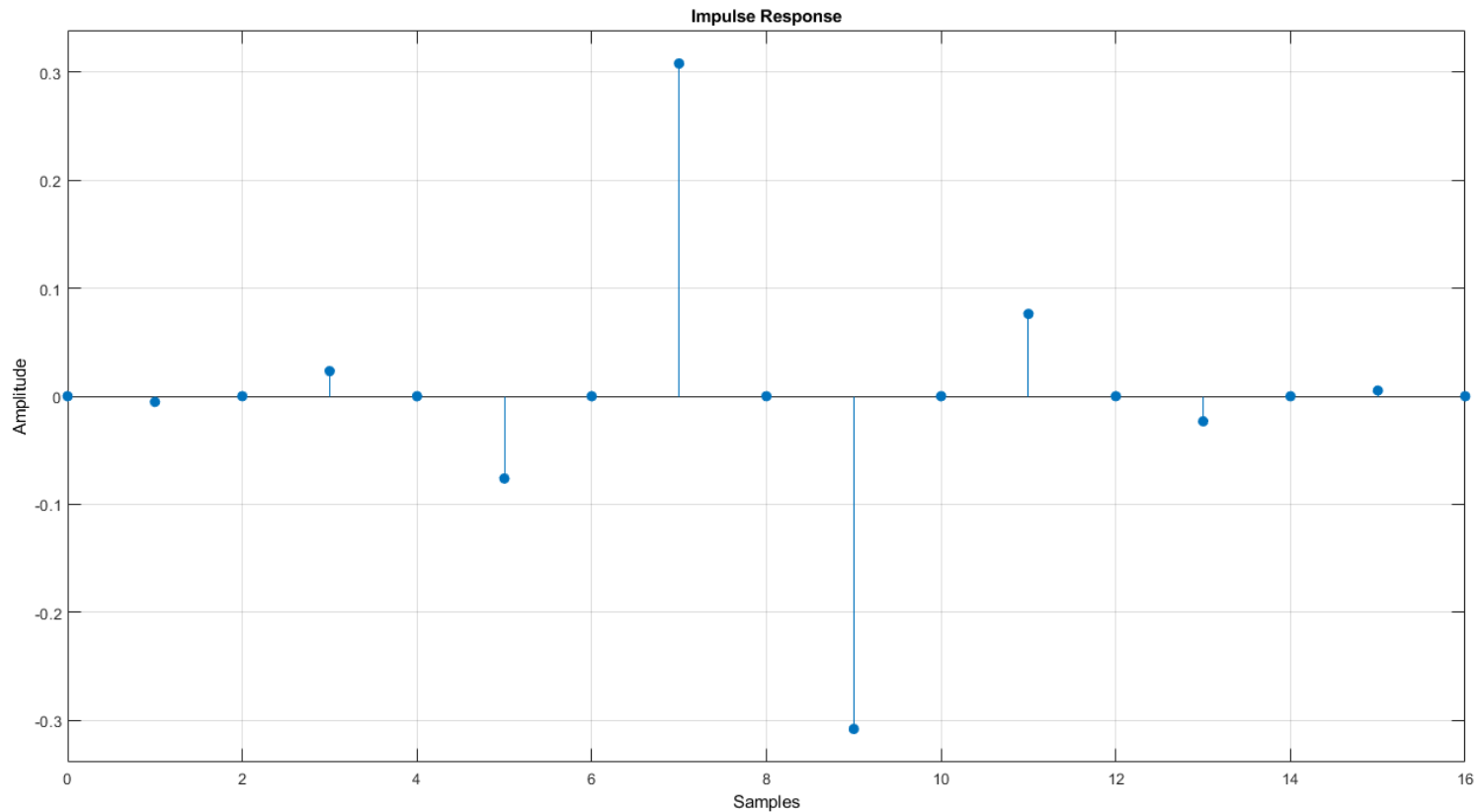
- sudá symetrie: $h(n) = h(N - 1 - n)$ pro $0 \leq n \leq N - 1$
s osou symetrie mezi vzorky $(N-2)/2$ a $N/2$



Filtr FIR typu 3



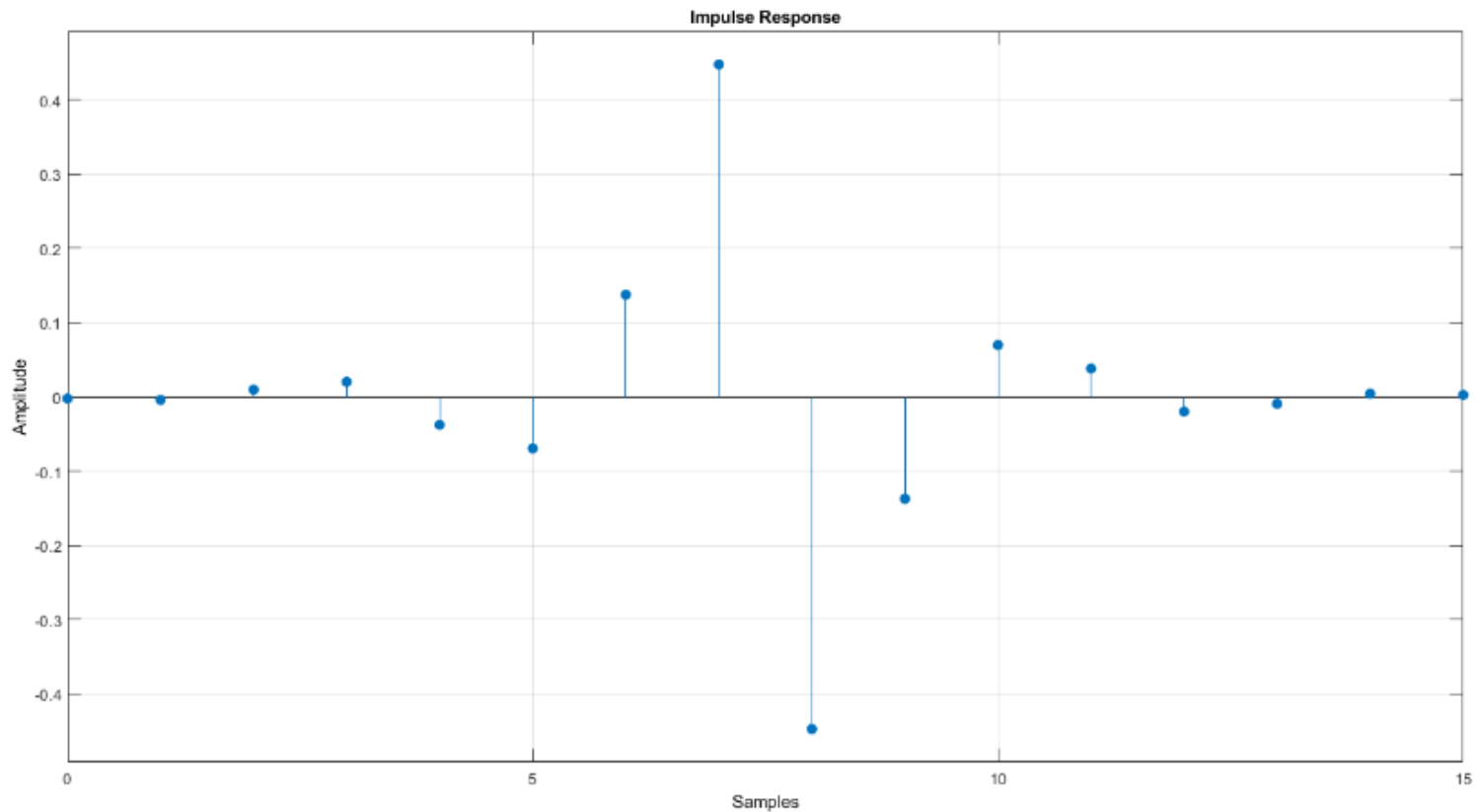
- lichá symetrie: $h(n) = -h(N - 1 - n)$ pro $0 \leq n \leq N - 1$
s osou symetrie $(N - 1)/2$



Filtr FIR typu 4



- lichá symetrie: $h(n) = -h(N - 1 - n)$ pro $0 \leq n \leq N - 1$
s osou symetrie mezi vzorky $(N - 2)/2$ a $N/2$



Souhrn pro FIR a IIR filtry



IIR

- návrh z analogového prototypu
- aproximace
- může být nestabilní (nutná kontrola stability)
- nízké řády (4 – 8)
- možná vyšší strmost
- mezní kmity (oscilace při kvantování)
- nelineární fáze

FIR

- návrh metodou oken a F. řad
- aproximace $h[n]$ konečná
- vždy stabilní
- vysoké řády (50 – 100)
- nižší strmost
- neosciluje
- lineární fáze

- počet koeficientů impulzové odezvy filtru řídí jeho strmost nikoli zvlnění
- důsledkem lineární fáze je nezkreslení tvaru signálu v propustném pásmu
- FIR oproti IIR nepracuje s předchozími hodnotami výstupního signálu - bez zpětné vazby

FIR a IIR v Matlabu

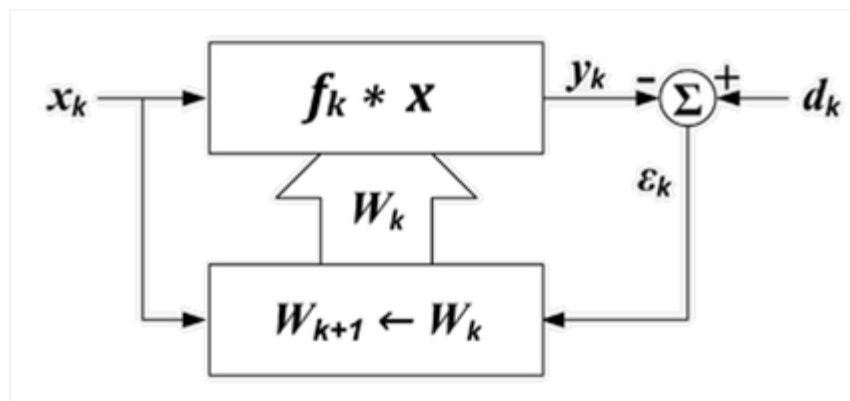


- `filterDesigner`
 - Grafický manager pro návrh filtru
 - Uživatel může navolit parametry v grafických komponentách
 - Výstupem je objekt
- `designfilt`
 - Komplexní příkaz pro návrh filtru
 - Možno definovat všechny důležité parametry
 - Výstupem je objekt
- Další příkazy
 - `fir1`, `fir2`, `firls`, `infilt`, `remez`, `remezord`
 - `butter`, `cheby1`, `cheby2`, `ellip`, `maxfalt`, `buttap`, `cheb1ap`, `cheb2ap`, `ellipap`, `buttord`, `cheb1ord`, `cheb2ord`, `ellipord`

Adaptivní filtrace



- Potřeba reagovat na změny rušení
- Základní uspořádání

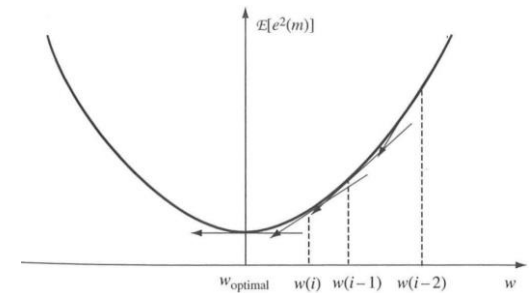


- Adaptace
 - Nejčastěji LMS (Least Mean Square) algoritmus
- Lineární filtr
 - V praxi většinou lineární filtr typu FIR (možno ale i IIR)

Adaptivní filtrace -LMS



- Gradietní prohledávání
 - důležitý je vztah mezi chybovým signálem ε_k a koeficienty filtru
 - střední kvadratické odchyly chybového signálu ε_k má kvadratickou závislost na koeficientech filtru
 - tedy můžeme pro střední hodnotu chybového signálu hledat globální minimum, které nám určuje optimální hodnotu koeficientu filtru



Adaptivní filtrace - LMS



- Adaptace filtru – obecně:

$$w(n + 1) = w(n) + \mu \left[-\frac{\partial E[e^2(n)]}{\partial w(n)} \right]$$

- Střední kvadratická odchyla \rightarrow chybový signal:

$$w(n + 1) = w(n) + \mu \left[-\frac{\partial e^2(n)}{\partial w(n)} \right]$$

- Chybový signal je: $e(n) = y(n) - w^T(n)x(n)$

- Dosazení vede ke vztahu:

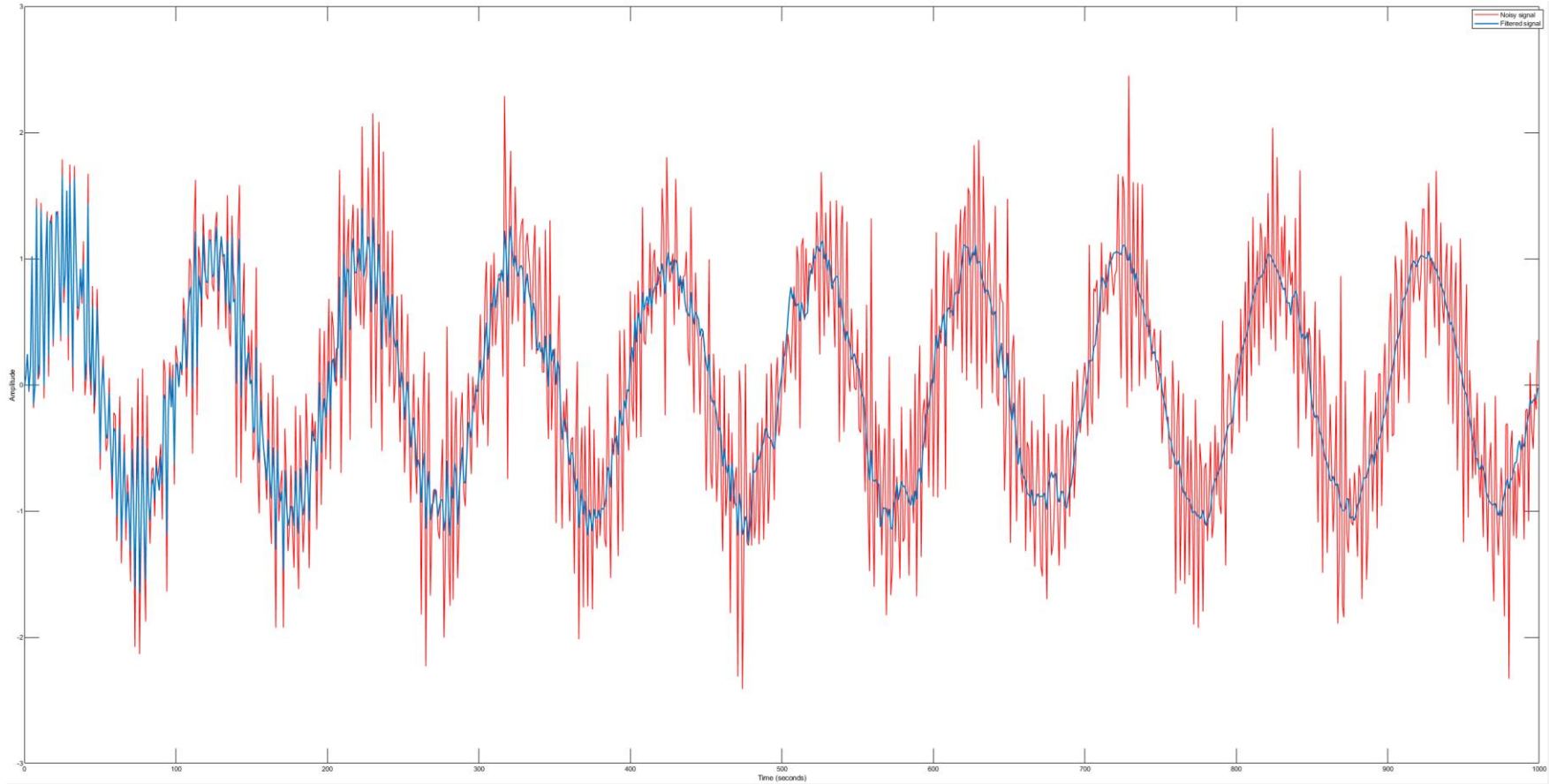
$$w(n + 1) = w(n) + \mu[x(n)e(n)]$$

$$b[n] = b[n-1] + \mu_i * x[n] * e[n]$$

Adaptivní filtrace



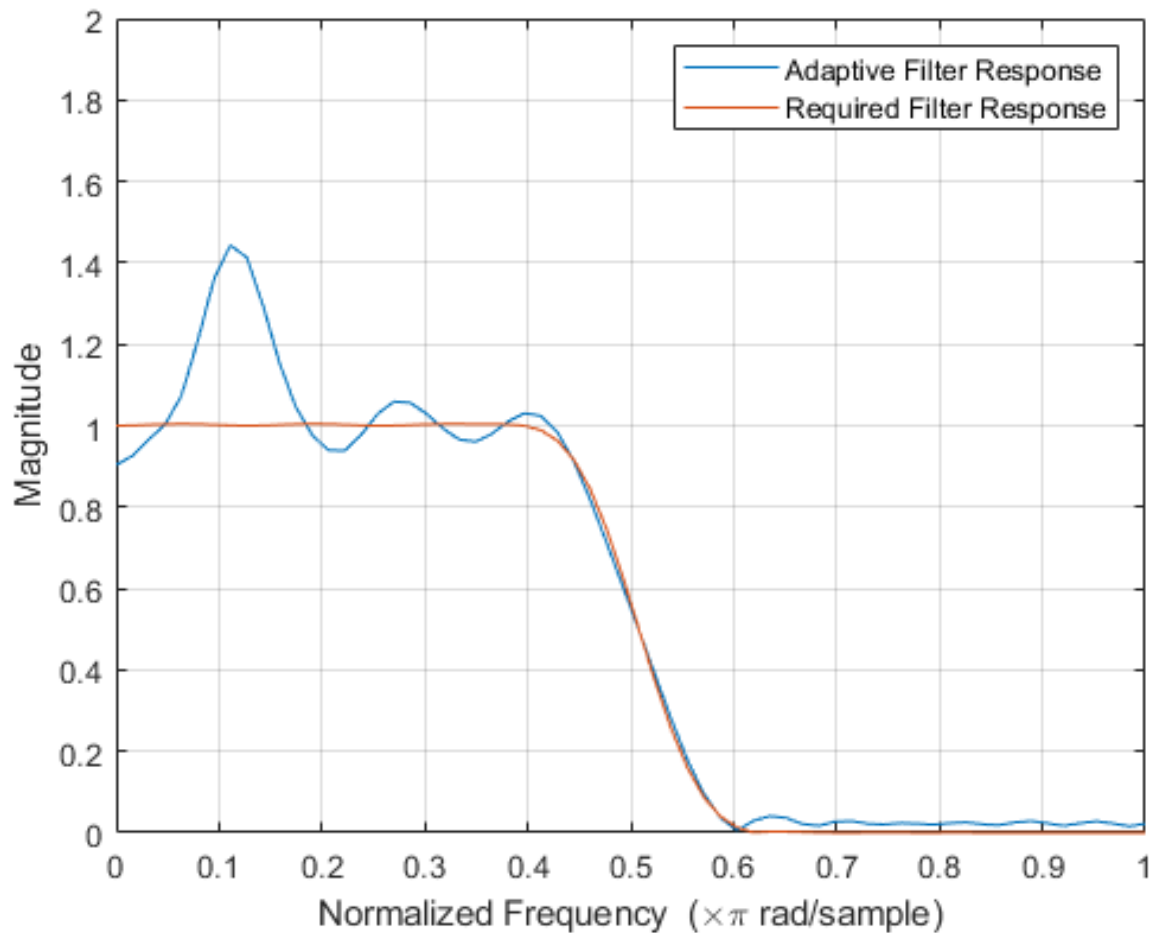
- Příklad – signál



Adaptivní filtrace



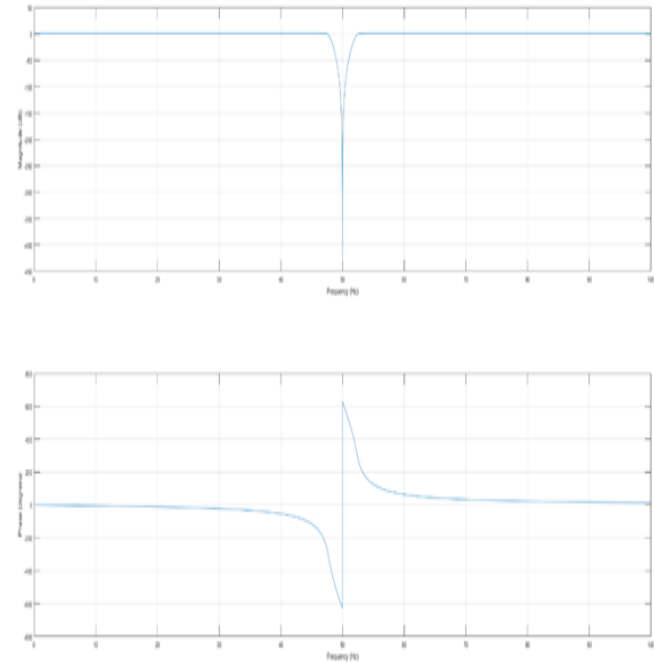
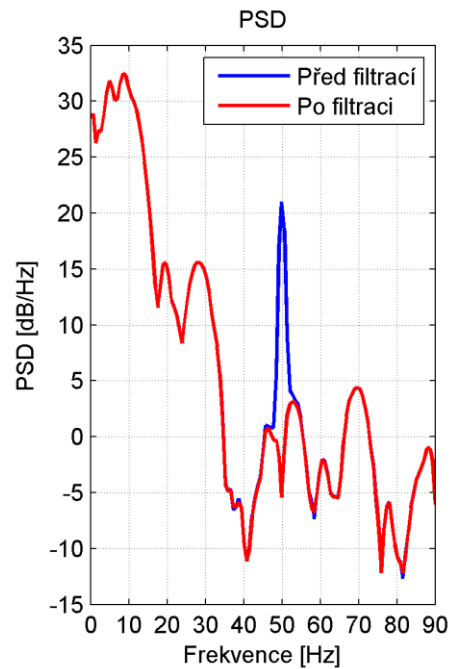
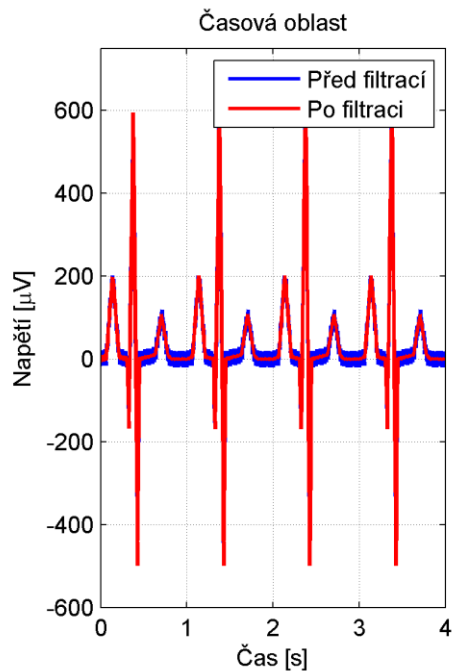
- Příklad – přenosová funkce



Filtrace - příklady



- Příklady filtrace síťového brumu

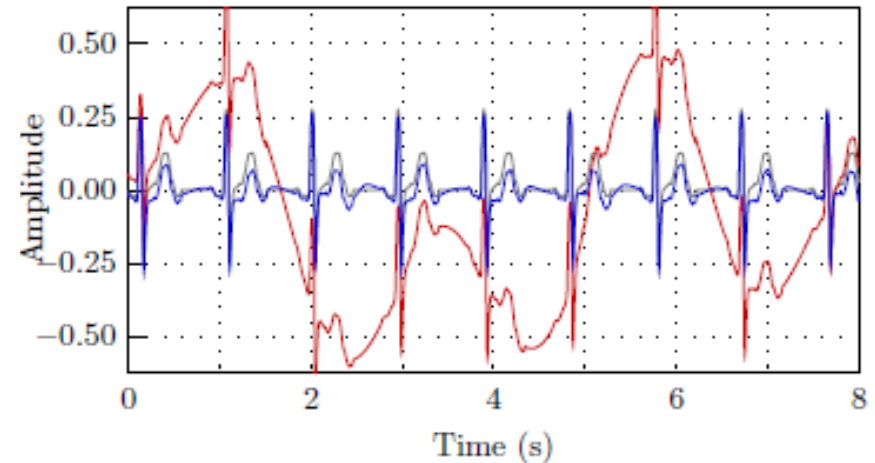
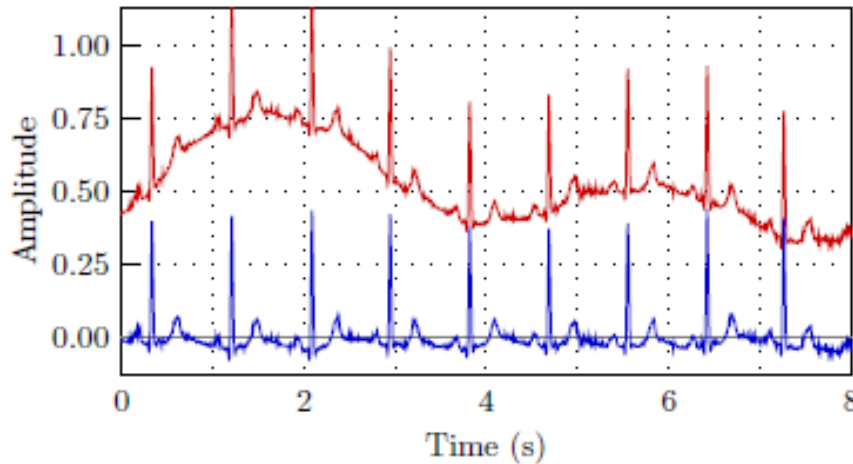


Reference: Tomáš Kaiser, *Hodnocení záznamů holtrovského EKG u pacientů se srdeční amyloidózou*, Diplomová práce, ČVUT FEL, 2015

Filtrace - příklady



- Odstranění tzv. baseline wandering

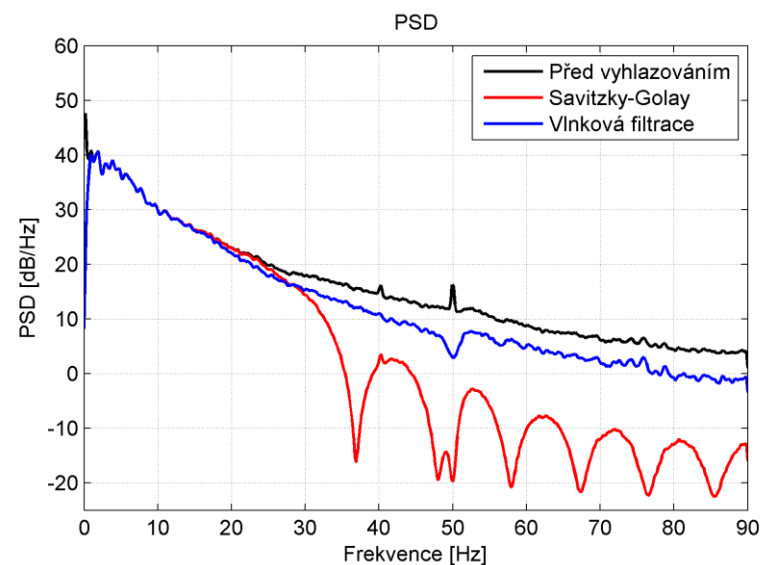
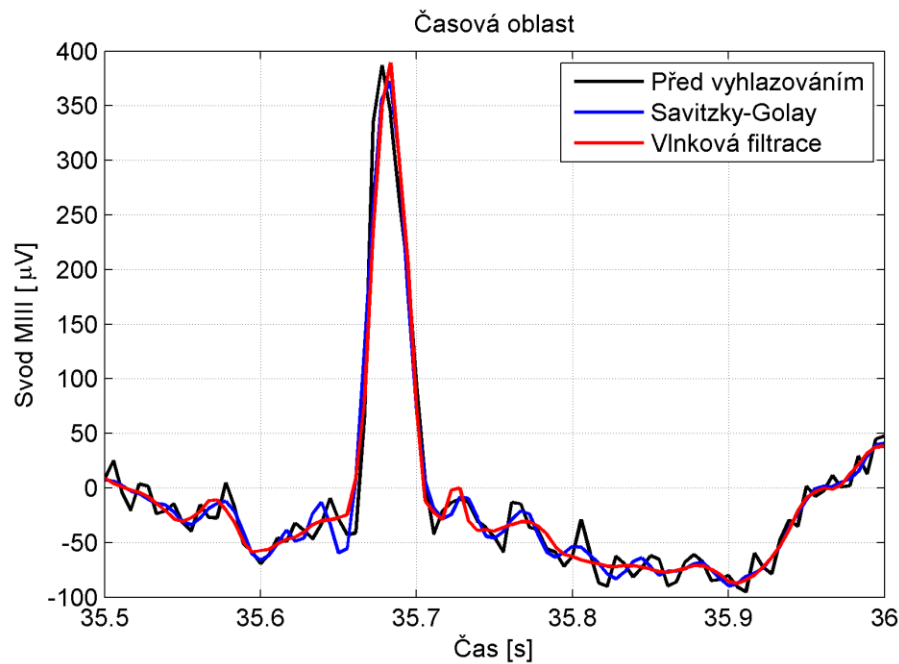


Reference: Borries, R.F. & Pierluissi, J.H. & Nazeran, Homayoun. (2005). Wavelet Transform-Based ECG Baseline Drift Removal for Body Surface Potential Mapping. Conference proceedings : ... Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society. IEEE Engineering in Medicine and Biology Society. Conference. 4. 3891-4. 10.1109/IEMBS.2005.1615311.

Filtrace - příklady



■ Vyhlazení signálu

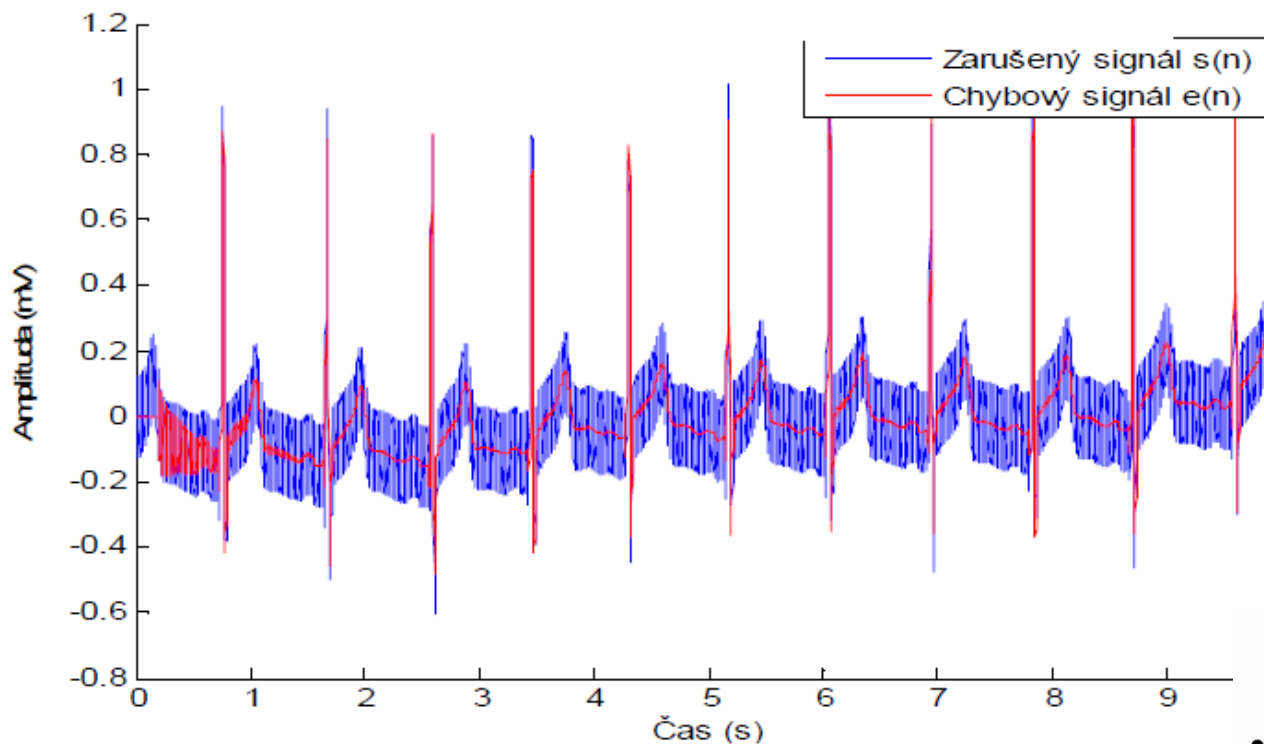


Reference: Tomáš Kaiser, Hodnocení záznamů holtrovského EKG u pacientů se srdeční amyloidózou, Diplomová práce, ČVUT FEL, 2015

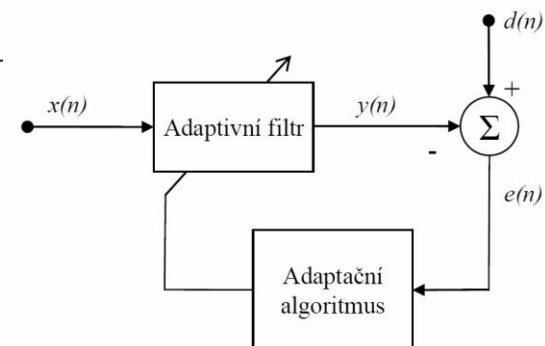
Filtrace - příklady



- Ukázky využití adaptivní filtrace pro EKG



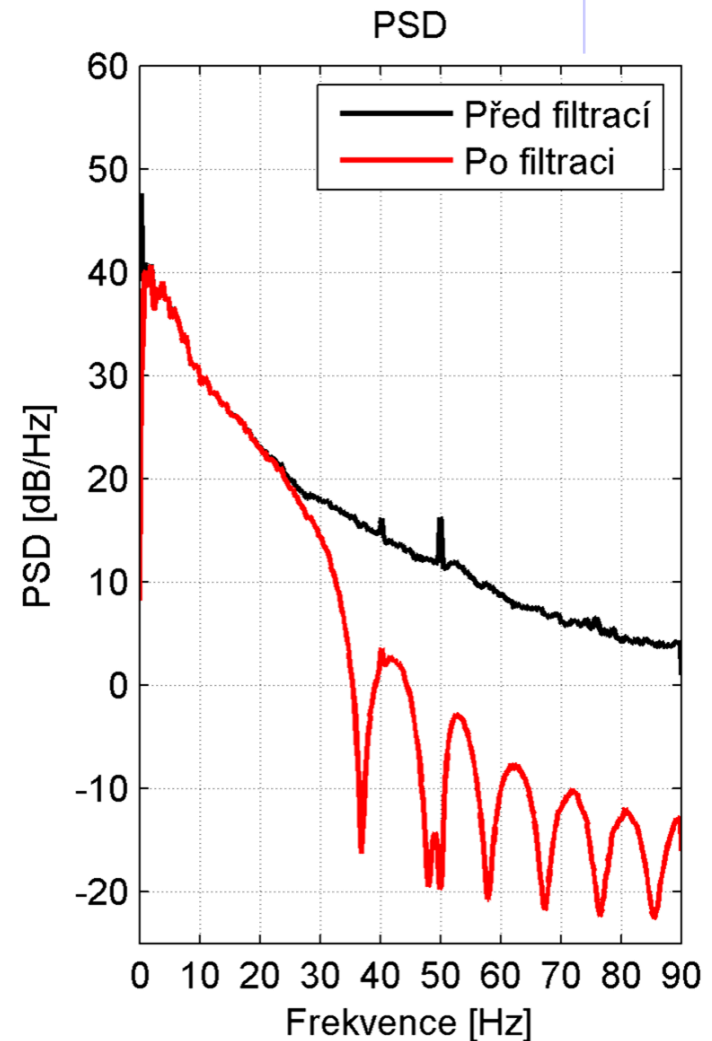
Reference: Martin Strouhal, *Adaptivní filtry pro zpracování biologických signálů*,
Bakalářská práce, VUT Brno, FEKT, 2014



Filtrace - příklady



- Síťové rušení 50 Hz
 - Notch filtr
 - $Q = 35$
 - $f_0 = 50 \pm 0.71$ Hz
- Odstranění pohybu izolinie
 - IIR filtr typu DP a 2. řádu
 - $f_0 = 0.5$ Hz
 - filtrace s nulovou fází
- Vyhlazení
 - filtr Savitzky-golay
 - Šířka okna: 23
 - Řád polynomu: 11



Filtr Savitzky-Golay



- Filtr určený pro vyhlazování signálu
- Moving Average Filter
 - Nejjednodušší forma vyhlazování signálu

$$y(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=n-k+1}^n x_i$$

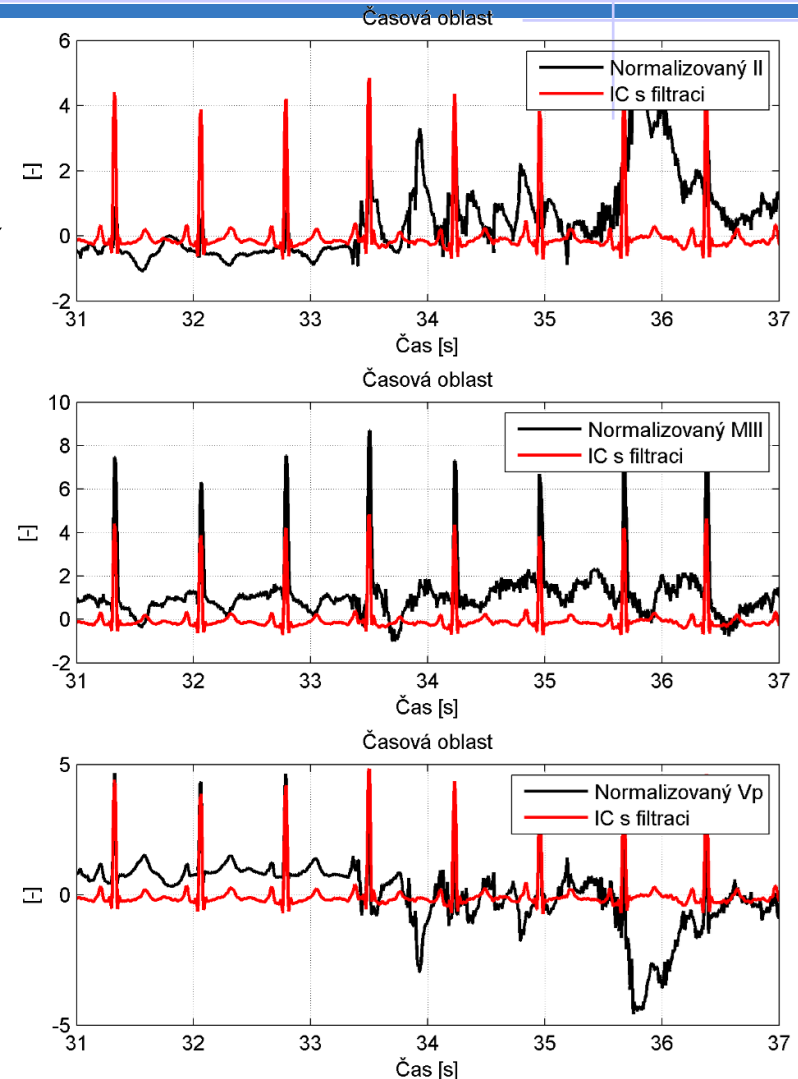
- Savitzky-Golay je složitější polynomiální formou vyhlazovacího filtru

$$y(k) = \sum_{i=\frac{1-m}{2}}^{\frac{m-1}{2}} C_i x_{j+i}; \quad \frac{m+1}{2} \leq j \leq n - \frac{m-1}{2}$$

Využití ICA



- Numerická metoda separace signálů
- Zpracovávaný signál tvořen lineární kombinací různých zdrojů signálu
- Komplikace:
 - Pořadí nezávislých komponent
 - Nelze určit energie nezávislých komponent
- V práci využito
 - určení komponenty pomocí upraveného detektoru artefaktů



Reference: Tomáš Kaiser, *Hodnocení záznamů holtrovského EKG u pacientů se srdeční amyloidózou*, Diplomová práce, ČVUT FEL, 2015