

# Spektrální analýza signálu II.

---

Ing. Václav Gerla, PhD.

21. listopad 2023

Poděkování:

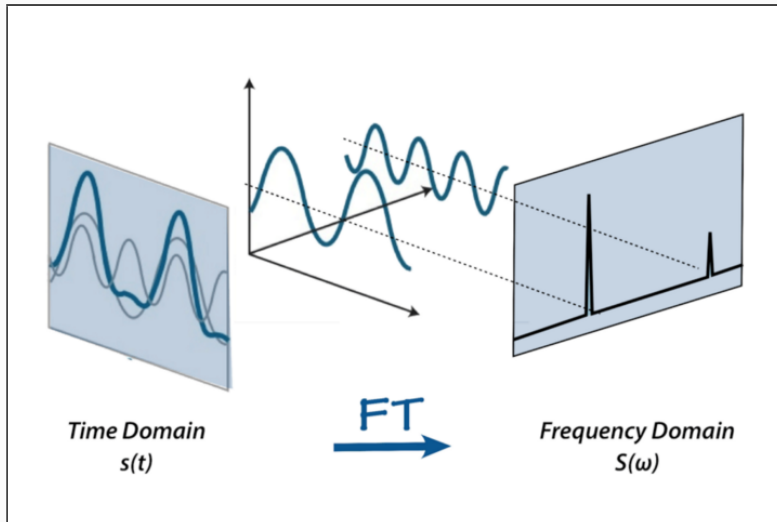
Prof. Ing. Václav Hlaváč, CSc.

Prof. Ing. Pavel Sovka, CSc.

Prof. Ing. Roman Čmejla, CSc.

Ing. Radek Janča, Ph.D.

# Fourierova transformace (FT)



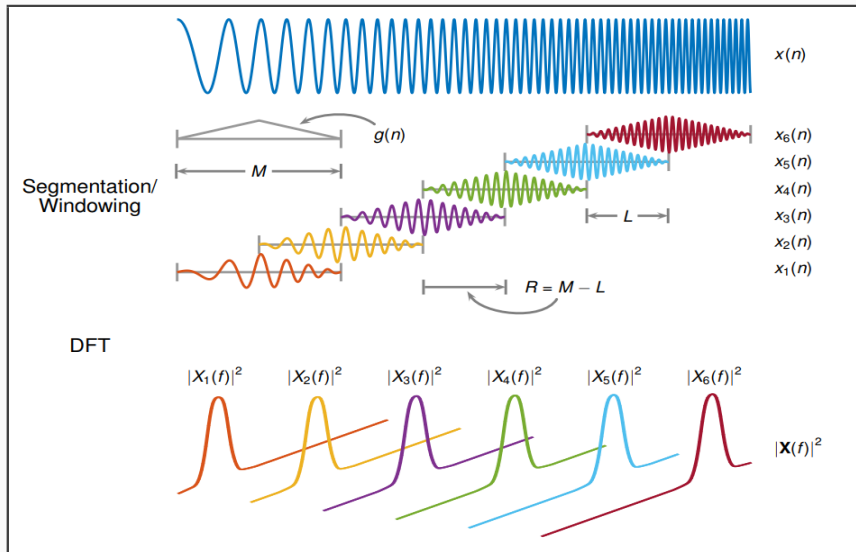
zdroj: *Aavos International*

# Analýza neperiodických signálů

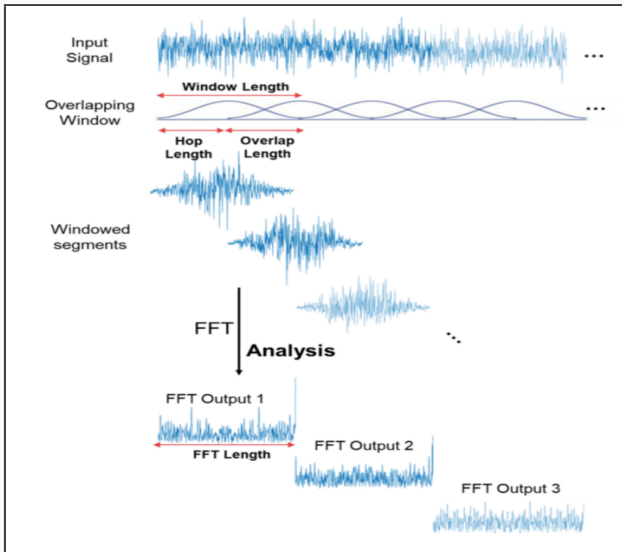
Fourierova transformace předpokládá **periodický signál**. V případě, že potřebujeme analyzovat neperiodický signál, můžeme použít jeden z následujících přístupů:

- Signál rozdělíme do časových oken a předpokládáme, že vně okna je signál periodický. Pouhé rozsekání signálu na obdélníková okna nemusí být dostatečné, protože na rozhraní oken jsou nespojitosti. Proto se v praxi signál v okně násobí tlumící funkcí, která zajistí nulovou hodnotu signálu na začátku a konci okna.
- Použijeme složitější báze funkce, např. vlnkovou transformaci (wavelets).

# Příklad STFT: změna frekvence v čase

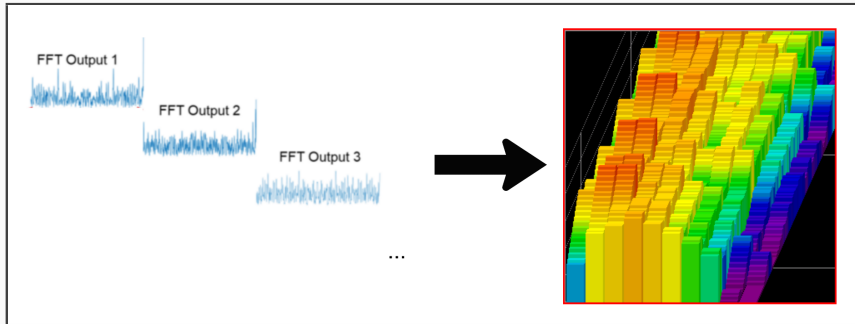


# Short-time Fourier transform (STFT)



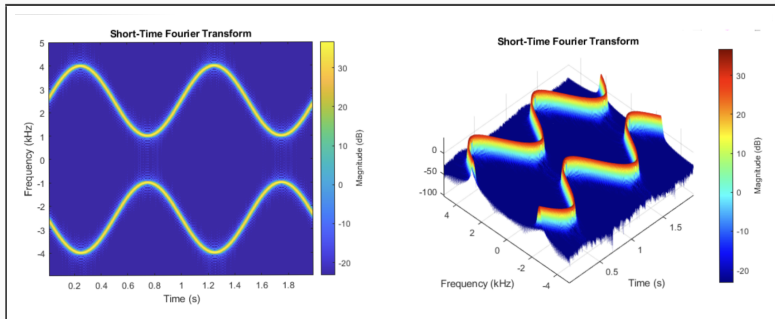
Signál analyzujeme po krátkých úsecích, které postupně násobíme posuvným symetrickým oknem. Na výsledek aplikujeme FT (FFT).

# Konstrukce spektrogramu



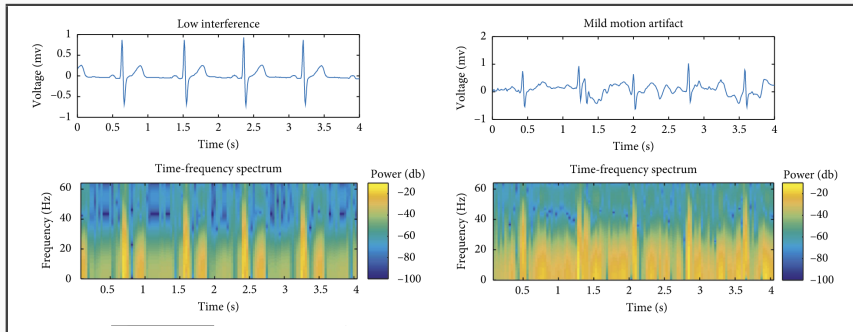
Projekce jednotlivých dílčích spekter do finální matice. Každý sloupec spektrogramu odpovídá spektru z jednoho časového okna.

# 2D a 3D zobrazení



zdroj: *Mathworks*

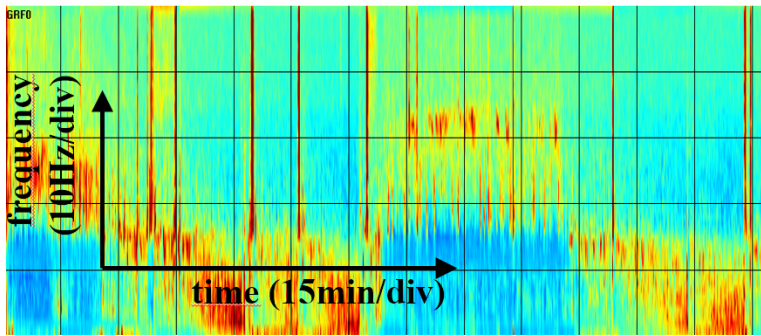
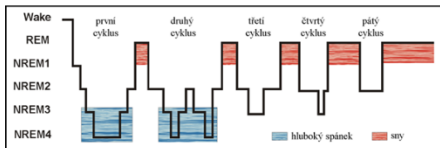
# Příklad spektrogramu: EKG signál



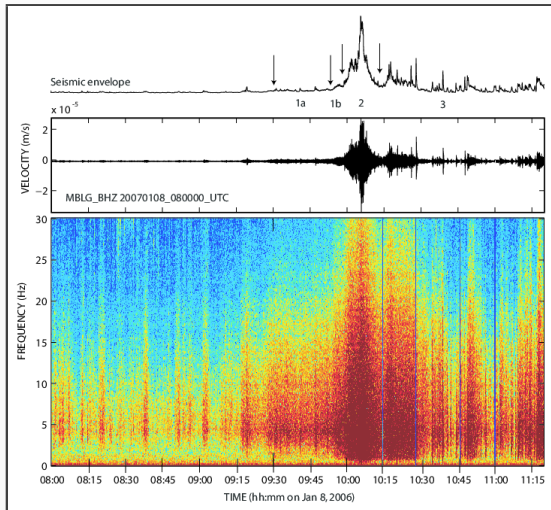
*Qifei Zhang et al., A Cascaded Convolutional Neural Network for Assessing Signal Quality of Dynamic ECG.*



# Příklad spektrogramu: EEG signál měřený během spánku

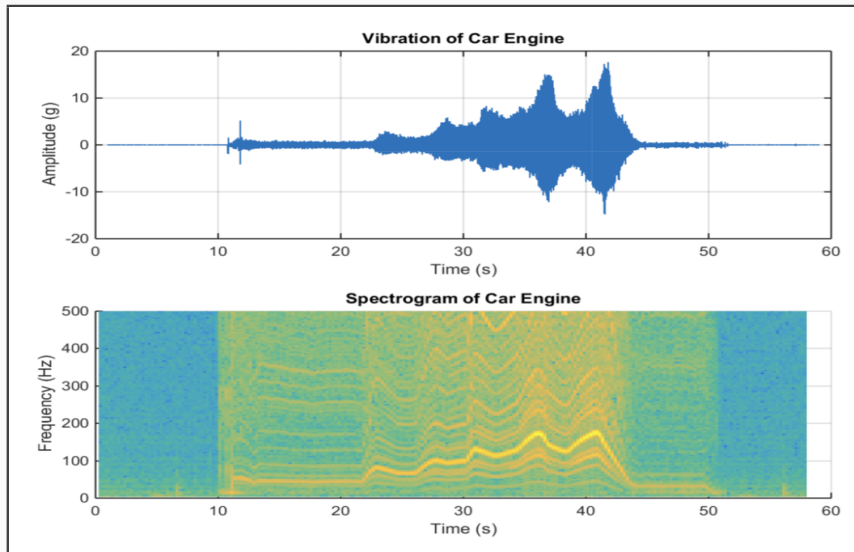


# Příklad spektrogramu: seismická aktivita

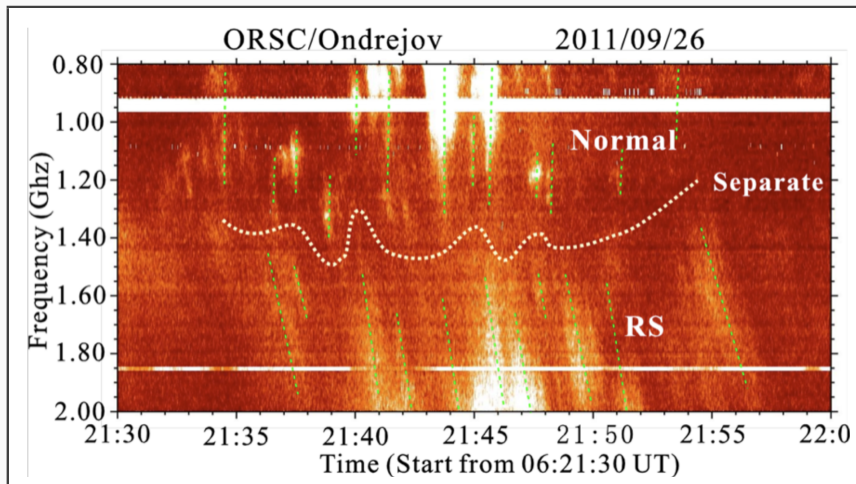


*Silvio De Angelis et al., Seismic characterization of pyroclastic flow activity at Soufrière Hills Volcano, Montserrat, 8 January 2007*

# Příklad spektrogramu: vibrace motoru v automobilu

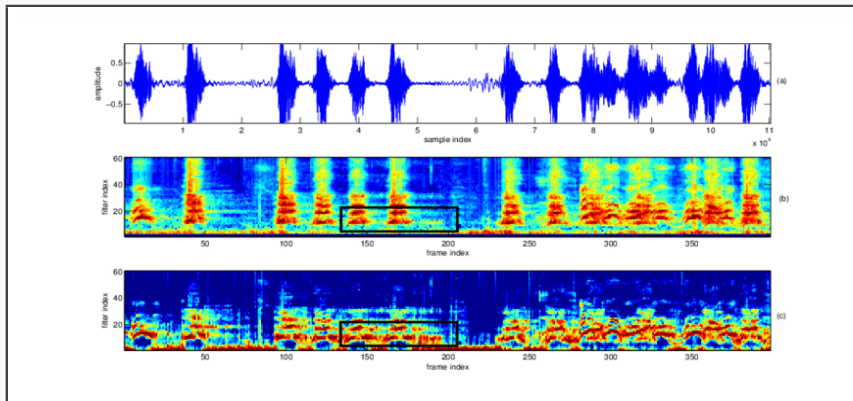


## Příklad spektrogramu: sluneční erupce



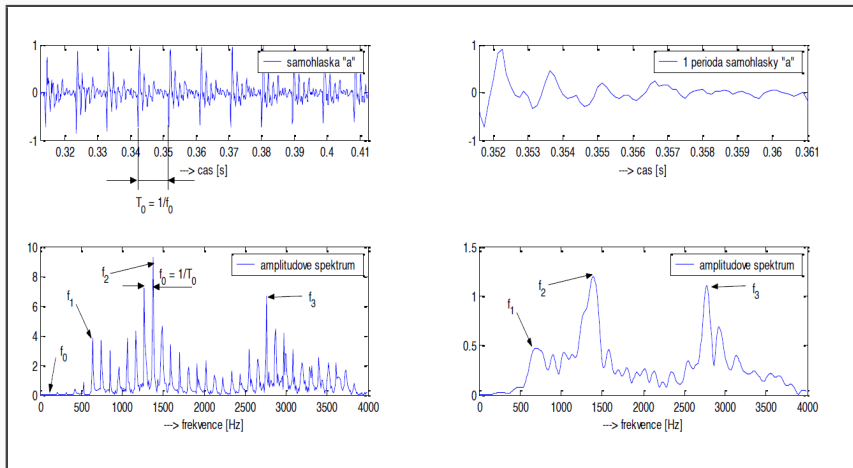
*Tan B. L. et al., Diagnosing the Source Region of a Solar Burst on 26 September 2011 by Using Microwave Type-III Pairs*

## Příklad spektrogramu: psí štěkot



Spectrographic analysis: (a) raw audio signal of dog sound, (b) Mel filterbank spectrogram, (c) phase encoded spectrogram. *Rishabh N. Tak et al., Novel Phase Encoded Mel Filterbank Energies for Environmental Sound Classification.*

# Příklad spektrogramu: analýza hlasu



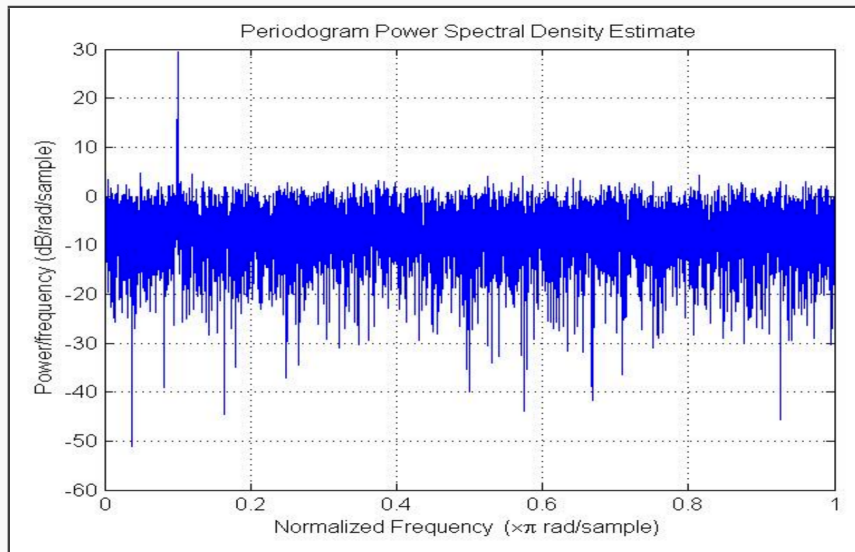
*Prof. Roman Čmejla; Manipulace ve spektru*

Určení PSD pomocí FT/DFT. Dva základní možné způsoby odhadů:

- periodogram  $|DFT(x)|^2$  (lze použít pouze pro ergodické signály)
- Welchova metoda = vyhlazený periodogram = průměr z realizací periodogramu = konzistentní odhad PSD (lze použít i pro neergodické procesy)

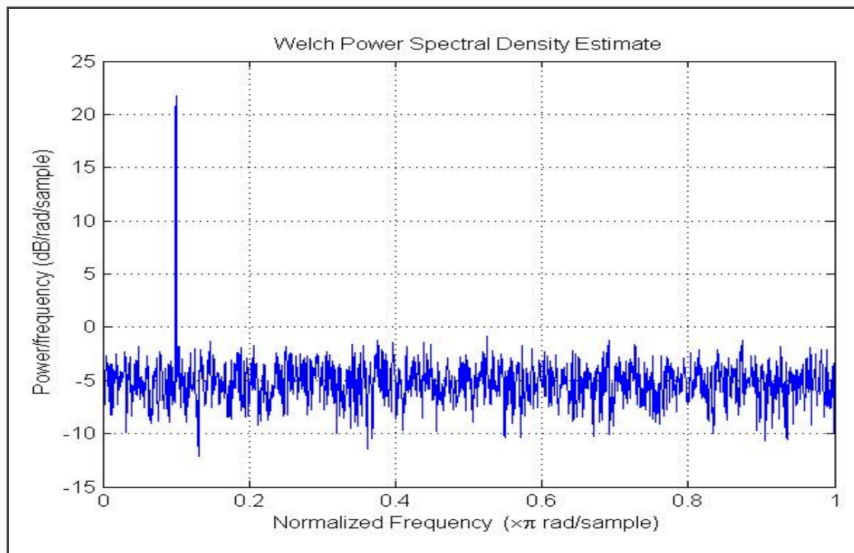
*Pozn: Ergodický signál je signál, jehož charakteristiky lze stanovit z jedné jeho realizace (jednoho měření). Většina signálů které mají stabilní charakter odpovídají ergodičnosti.*

# Periodogram - značná chyba odhadu





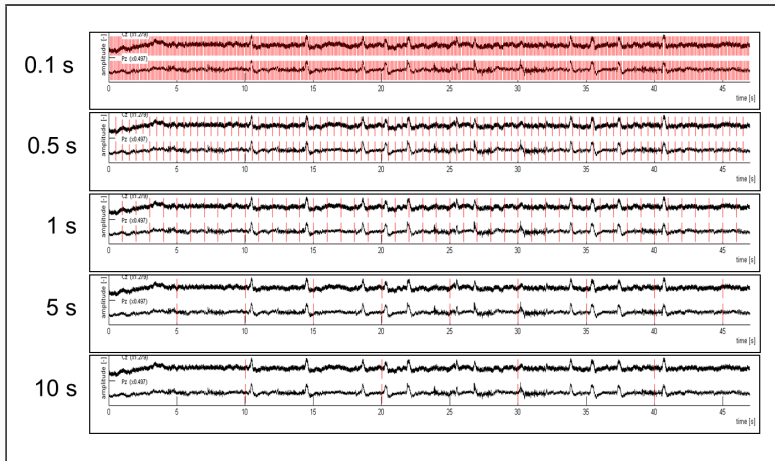
# Welchova metoda - redukce chyby odhadu průměrováním 8 periodogramů



# Princip neurčitosti

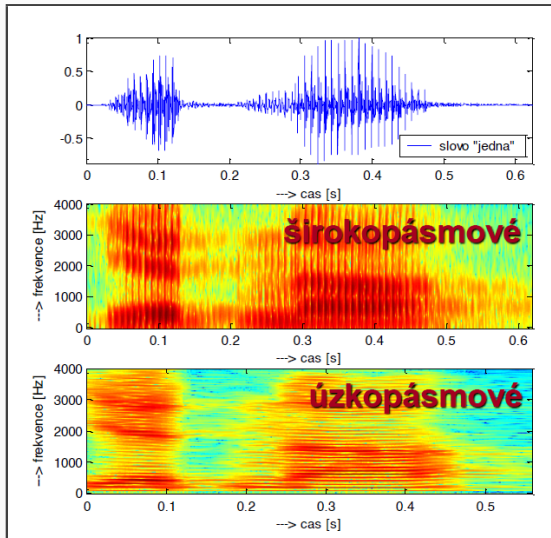
- Všechny dvojice (časový signál  $\leftrightarrow$  Fourierův obraz) jsou vázany principem neurčitosti.
- Signál o krátké době trvání má široké frekvenční spektrum a obráceně.
- Není možné s libovolnou přesností lokalizovat signál v časové a frekvenční oblasti (časové rozlišení  $\times$  frekvenční rozlišení = konst.).
- Tento princip vychází z Heisenbergova principu neurčitosti, který říká, že čím přesněji určíme jednu z konjugovaných vlastností, tím méně přesně můžeme určit tu druhou – bez ohledu na to, jak dobré přístroje máme (Kvantová mechanika, Nobelova cena v roce 1932).
- W. Heisenberg 1927: “Čím přesněji je určena poloha částice, tím méně přesně známe v daném okamžiku hybnost a naopak.”

# Volba délky časového okna



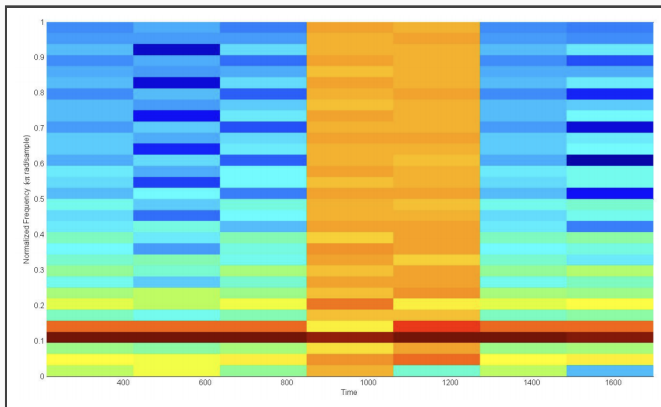
Segmentaci signálu provádíme s přihlednutím k typu signálu a obsažené informaci v něm. Na obrázku je ukázka dvou EEG signálů, které obsahují mix dvou typů artefaktů - svalová činnost a artefakt způsobený mrkáním.

# Vliv délky časového okna



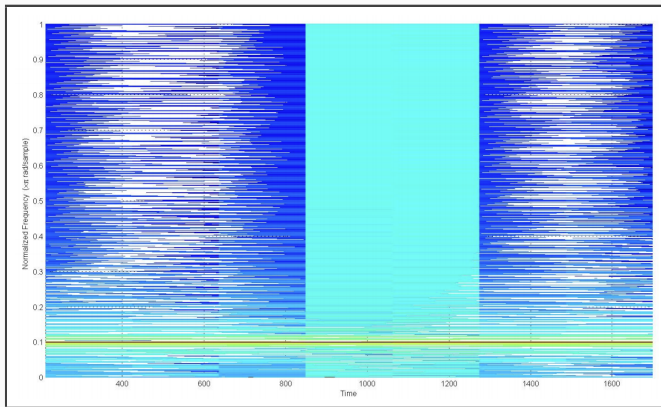
*Prof. Roman Čmejla; Manipulace ve spektru*

# Spektrogram součtu sinusovky a jednotkového signálu



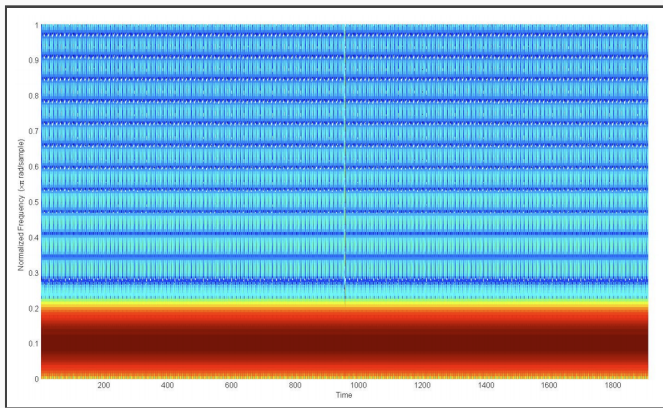
a) Nepřesná lokalizace v čase i frekvenci

# Spektrogram součtu sinusovky a jednotkového signálu



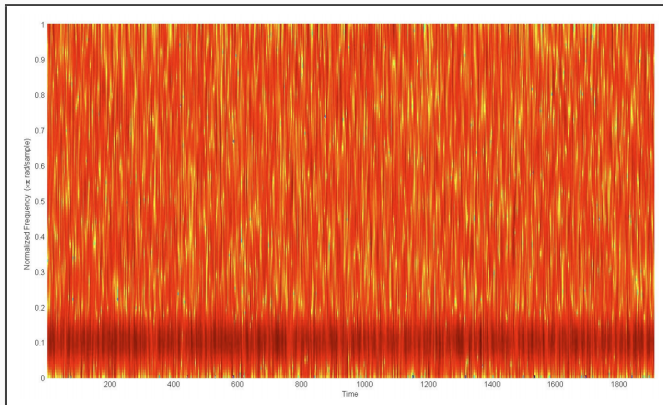
b) Nepřesná lokalizace v čase, přesná ve frekvenci

# Spektrogram součtu sinusovky a jednotkového signálu



c) Přesná lokalizace v čase, nepřesná ve frekvenci

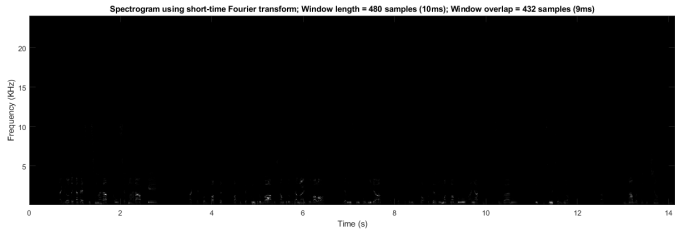
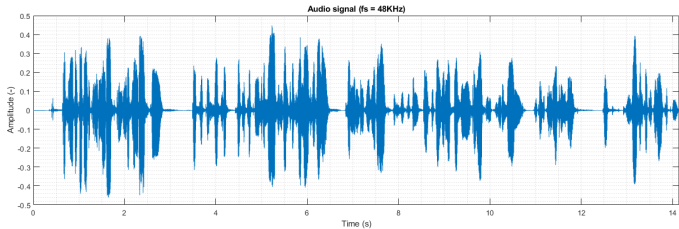
# Spektrogram součtu sinusovky a jednotkového signálu



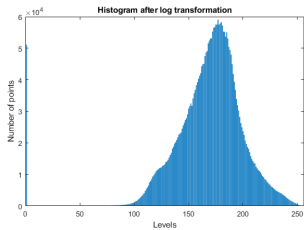
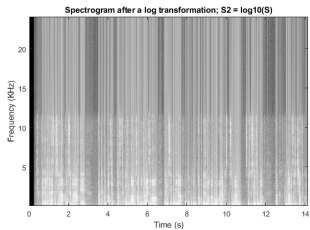
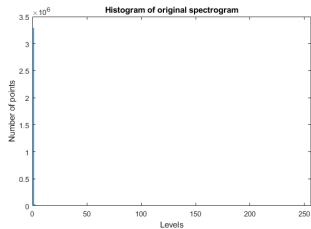
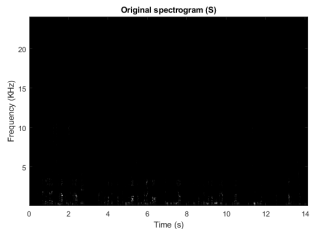
d) Vliv šumu na spektrogram (SNR = 6dB)  
zdroj: *Prof. Pavel Sovka, Spektrální analýza*



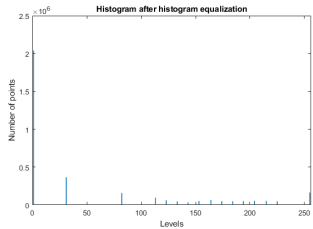
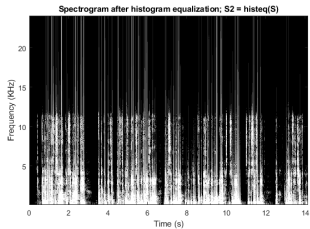
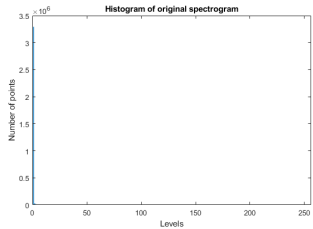
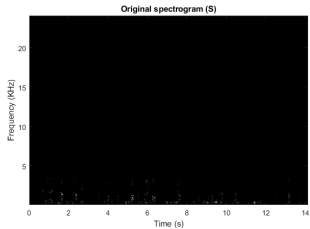
# Spektrální analýza hlasu



# Transformace hodnot spektrogramu přes logaritmus



# Ekvalizace histogramu



# 2D Fourierova transformace

Analogicky k 1D FT můžeme definovat i 2D FT:

## 1D FT

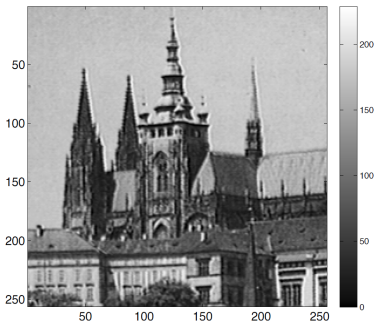
$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i \xi t} dt$$

## 2D FT

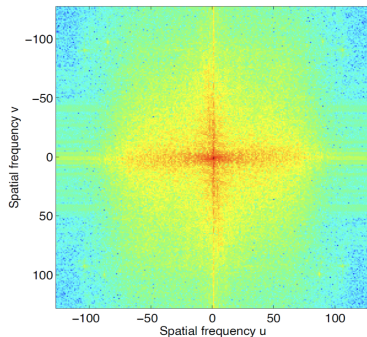
$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)e^{-2\pi i(xu+yv)} dx dy$$

# 2D Fourierova transformace

8-bitový šedotónový obrázek (2D matice)



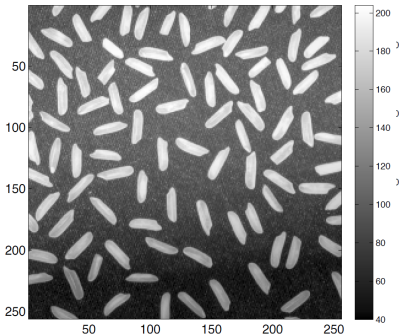
Logaritmické výkonové spektrum



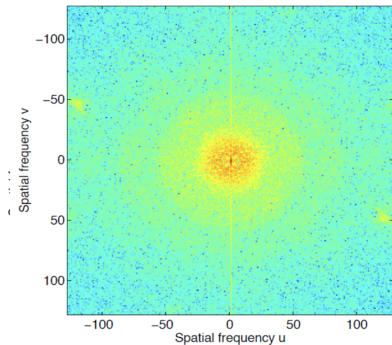
*zdroj: Prof. Václav Hlaváč, ČVUT*

# 2D Fourierova transformace

8-bitový šedotónový obrázek (2D matice)

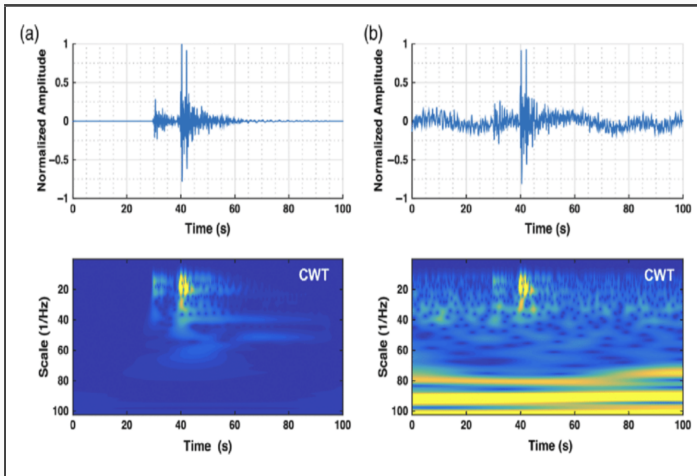


Logaritmické výkonové spektrum



*zdroj: Prof. Václav Hlaváč, ČVUT*

# Continuous wavelet transform (CWT)



- alternativa k FT

- výhoda: obdržíme spektrální informace lokalizované v čase
- nevýhoda: ztráta spektrální přesnosti při výpočtu derivací

- FS (Fourier series) - Fourierovy řady
- FT (Fourier transform) - Fourierova transformace
- DFT (Discrete Fourier transform) - Diskrétní Fourierova transformace
- FFT (Fast Fourier transform) - Rychlá Fourierova transformace
- STFT (Short-time Fourier transform) - Krátkodobá Fourierova transformace
- PSD (Power Spectral Density) - Výkonová spektrální hustota
- 2D FT (Two-dimensional Fourier transform) - dvojrozměrná Fourierova transformace



V literatuře se někdy pracuje s následujícími pojmy:

- CTFT (Continuous-Time Fourier transform) - Fourierova transformace se spojitým časem
- DTFT (Discrete-time Fourier transform) - Fourierova transformace s diskrétním časem