Úvod do nelineárních systémů
Fraktalita
Deterministický chaos

Ing. Václav Gerla, Ph.D.

12. listopad 2024

Nelineární analýza signálu

Signály z reálného světa jsou často **nelineární**. Rozdíl mezi lineárním a nelineárním signálem spočívá v tom, jak se signál chová v čase a jaké vztahy existují mezi vstupy a výstupy systému, který signál generuje nebo zpracovává.

K analýze nelineárních systémů se používají metody jako **fraktální dimenze** a **Lyapunovovy exponenty**, které zkoumají složitost a chaotičnost systémů.

Lineární a nelineární systémy

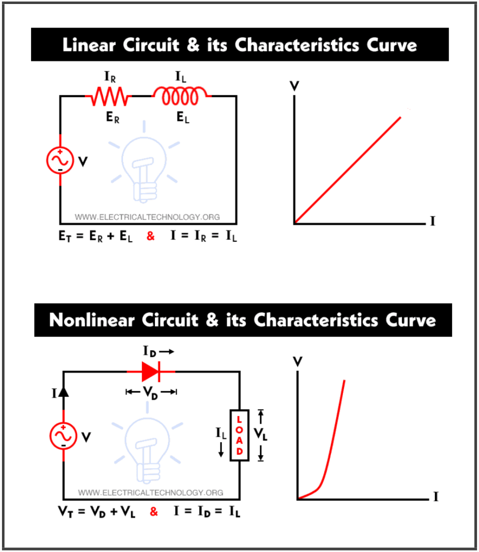
Lineární systém

- Má vlastnosti superpozice (aditivita a homogenita).
- Výstup systému je přímo úměrný vstupu. Pokud je vstup násoben konstantou, výstup je násoben stejnou konstantou.
- Signály a systémy jsou předvídatelné a jednoduše analyzovatelné.
- Ukázka: $x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$

Nelineární systém

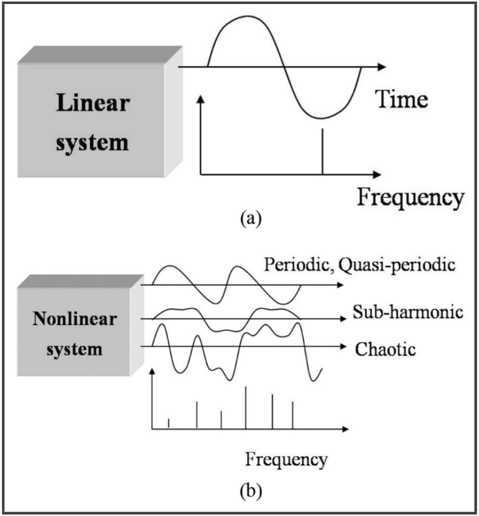
- Nejsou splněny vlastnosti superpozice.
- Výstup není přímo úměrný vstupu a může zahrnovat složitější vztahy, jako jsou odmocniny, nebo exponenciální funkce.
- Nelineární systémy mohou vykazovat fenomény jako harmonické zkreslení, nebo chaotické chování.
- Ukázka: $x(t) = A\sin^2(\omega t + \phi)$

Lineární a nelineární systémy - ukázka



https://www.electricaltechnology.org/2013/12/the-main-difference-between-linear-and-nonlinear-circuits.html

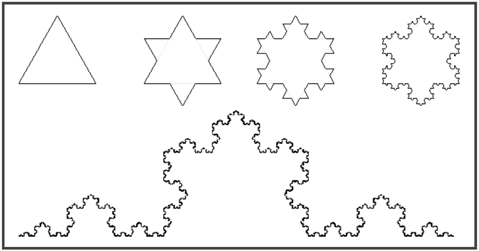
Ukázka lineárních a nelineárních signálů



Aditya Sharma, Nonlinear dynamic investigations on rolling element bearings: A review, 2018

Fraktalita - samopodobnost

Útvar nazveme samopodobným, když jej můžeme rozdělit na konečný počet částí „podobajících se původnímu tvaru (např. trojúhelník, čtverec, Kochova vločka).



Konstrukce a struktura fraktální křivky Kochové. Nahoře: 1.,2.,3. a 4. iterace křivky. Dole: Zvětšený pohled na členitou strukturu křivky.

https://astronuklfyzika.cz/Gravitace3-3.htm

Příroda má ráda fraktalitu

Fraktalní dimenze

Fraktální dimenze je metrikou, která kvantifikuje fraktalitu objektu.

Fraktální objekty jsou charakteristické svou složitostí a škálovací symetrií – při různém měřítku vykazují podobné struktury. Na rozdíl od běžných geometrických objektů, jejichž dimenze jsou celé číslo (1D, 2D, 3D), fraktální objekty často existují v necelých dimenzích.

Fraktální dimenze popisuje, jak se mění detailnost struktury objektu s měřítkem. Pro jednoduché objekty, jako je čára nebo plocha, je tato hodnota celá (např. čára má dimenzi 1, plocha 2).

Fraktální dimenze může nabývat např. hodnot mezi 1 a 2 pro velmi detailní křivky a mezi 2 a 3 pro detailní povrchy.

Odhad fraktální dimenze signálu

Higuchiho metoda

- Efektivní algoritmus pro výpočet fraktální dimenze časových řad.
- Signál se rozloží do několika částí s různou granularitou, vypočítá se délka křivky pro každou část a výsledná fraktální dimenze se určí pomocí log-log grafu délky křivky proti měřítku rozdělení.

Box-counting

- Signál se pokryje „boxy“ různých velikostí a počítá se, kolik těchto boxů je zapotřebí k pokrytí signálu. Poté se použije log-log graf pro odhad fraktální dimenze.

DFA (Detrended Fluctuation Analysis)

- Metoda určená pro zkoumání dlouhodobé korelační struktury v časových řadách.
- Signál se rozdělí na segmenty, z každého segmentu se odstraní trend a vypočítá se průměrná fluktuace. Vynese se do log-log grafu a fraktální dimenze se určí ze směrnice přímky.

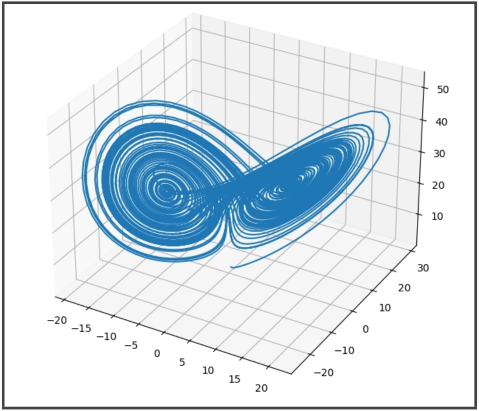
Teorie chaosu - Deterministický chaos

- **Chaos** je tradičně chápán jako naprostá nepřítomnost řádu
- **Řád** je tradičně chápán jako pravidelné chování, které jsme schopni předvídat
- Označení "deterministický chaos" vzniklo spojením těchto dvou pojmů

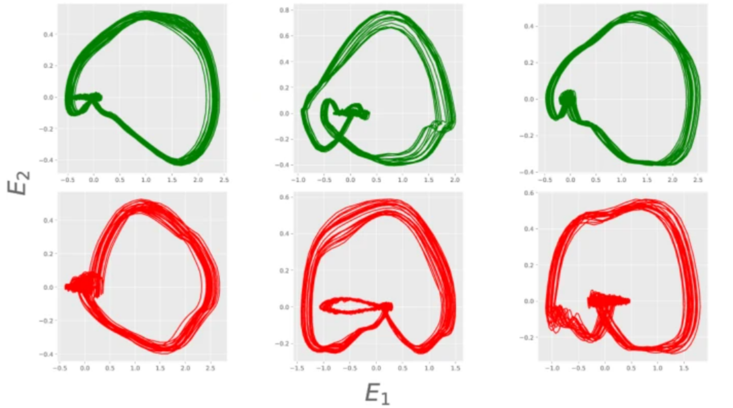
Chaos v deterministickém systému je stav, kdy systém sice podléhá pevným a předvídatelným pravidlům (rovnicím), ale je extrémně citlivý na počáteční podmínky. To znamená, že i nepatrné změny v počátečních hodnotách vedou k výrazně odlišným výsledkům v průběhu času.

Deterministický chaos - Lorenzův atraktor

Lorenzův atraktor - příklad nelineárního dynamického systému, který vykazuje chaotické chování (tzv. deterministický chaos). Tento atraktor se objevuje ve trojrozměrném prostoru a je výsledkem řešení systému tří diferenciálních rovnic popisujících změny ve stavu systému v čase. Velmi citlivě reaguje na počáteční podmínky.



Deterministický chaos - Ukázka atraktorů odvozených z EKG signálů



Two dimensional projections of embedded attractors for ECG signals for three healthy (top panel) and three unhealthy (bottom panel) cases. All the attractors are plotted using the SVD transformation.

Ljapunovovy exponenty

Ljapunovovy exponenty jsou matematický koncept používaný k charakterizaci chování dynamických systémů, zejména k popisu jejich citlivosti na počáteční podmínky. Jsou důležité při analýze systémů, které vykazují chaotické chování.

Interpretace:

- Pozitivní Ljapunovův exponent: Indikuje, že systém je chaotický a že trajektorie se exponenciálně vzdalují s časem, což znamená citlivost na počáteční podmínky.
- Nulový Ljapunovův exponent: Ukazuje na kvaziperiodické chování.
- Negativní Ljapunovův exponent: Znamená, že trajektorie se s časem sbíhají, systém je stabilní.

Podrobnější popis:
https://www.ukbonn.de/site/assets/files/22951/06-wt-lyapunovexp.pdf