

Spektrální analýza signálu I.

Ing. Václav Gerla, PhD.

7. listopad 2023

Poděkování:

Prof. Ing. Václav Hlaváč, CSc.

Prof. Ing. Pavel Sovka, CSc.

Prof. Ing. Roman Čmejla, CSc.

Ing. Radek Janča, Ph.D.

Fourierova transformace (FT)

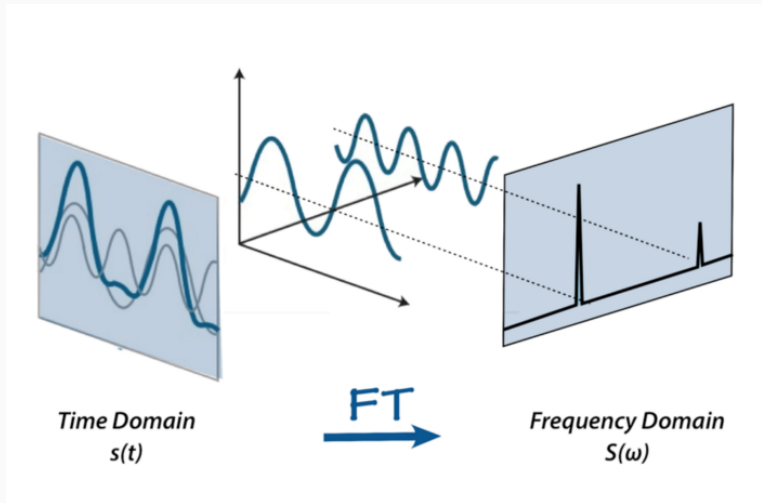


Jean-Baptiste Fourier (1768 - 1830)
(francouzský matematik)

Fourierova transformace (FT)

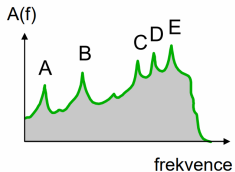
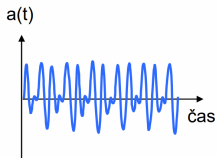
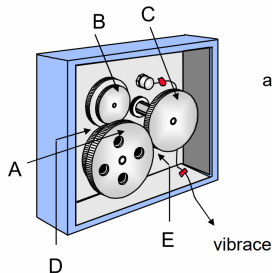
- Fourierova transformace je základním nástrojem pro (lineární) zpracování signálů.
- Dovoluje vzájemně jednoznačný převod signálů z/do časové reprezentace $f(t)$ do/z frekvenční reprezentace $F(\xi)$.
- Umožňuje analyzovat frekvenční obsah (spektrum) signálu.

Fourierova transformace (FT)



zdroj: *Aavos International*

Fourierova transformace - Mechanika



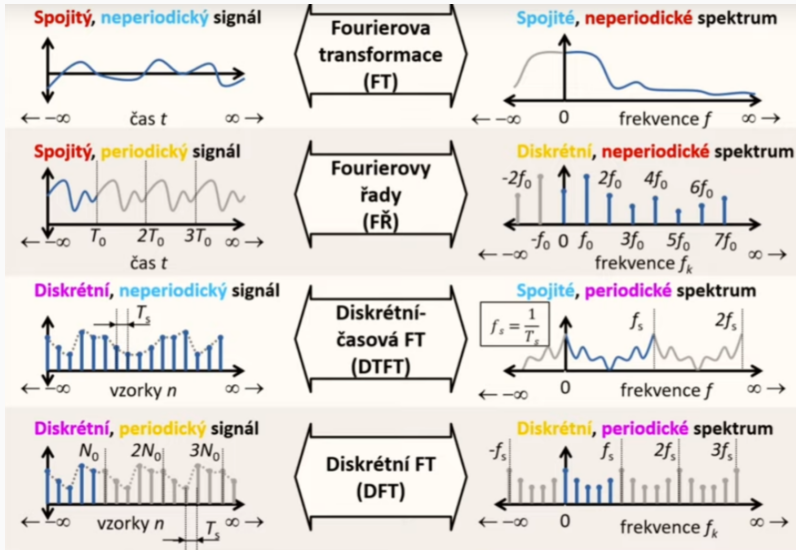
- Jednotlivé jevy jsou v časové oblasti promíchány

- Jednotlivé jevy jsou ve frekvenční oblasti od sebe odděleny

zdroj:

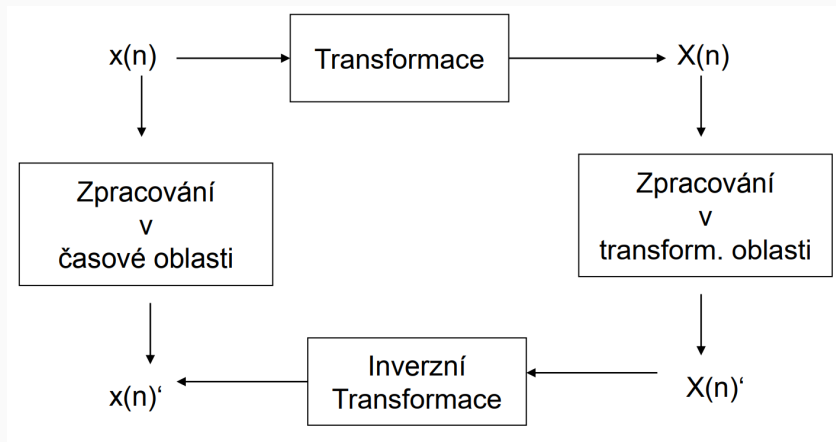
http://physics.ujep.cz/~mmaly/vyuka/poc_fyz_2/FT/EXPME_3.pdf

Integrační transformace



Základní idea transformace

Uvažujeme dva případy: transformace v časové, nebo v transformované oblasti:



Komplexní čísla

Komplexní číslo rozšiřuje reálné číslo o imaginární složku

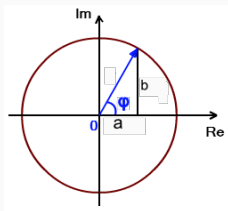
$$x = a + ib$$

$$a = \operatorname{Re}\{x\}; b = \operatorname{Im}\{x\}$$

Exponenciální tvar

$$x = |x|e^{-i\varphi}$$

$$|x| = \sqrt{a^2 + b^2}; \varphi = \operatorname{atan}(b/a)$$



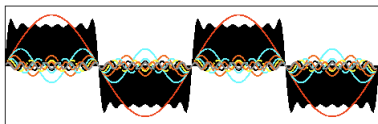
Fourierovy řady

Harmonická analýza

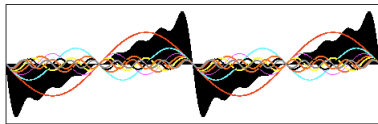
Libovolnou **periodickou** funkci lze rozložit na elementární harmonické složky (sinusové a kosinusové).

Kmitočtová syntéza

Kombinací harmonických složek lze vytvořit libovolnou **periodickou** funkci.

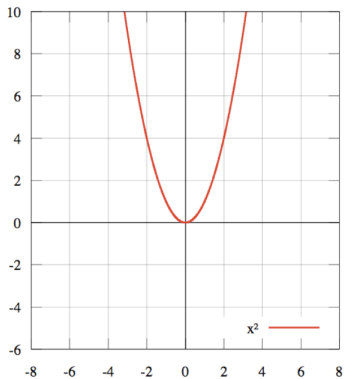


Frekvence: $f + 3f + 5f + \dots + 15f$

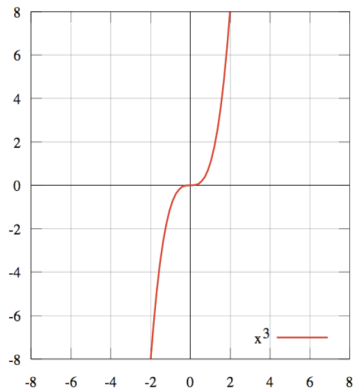


Frekvence: $f + 2f + 3f + \dots + 8f$

Sudé a liché funkce (příklad)



sudá: $y(x) = y(-x)$

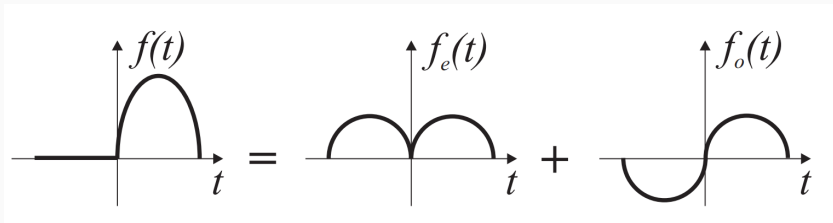


lichá: $y(x) = -y(-x)$

Sudé a liché funkce

Každou funkci lze rozložit na sudou a lichou část. Sudou část lze poté vyjádřit pomocí kombinace kosinů, lichou část pomocí kombinace sinů.

Příklad rozložení funkce na sudou a lichou část:



Trigonometrický tvar Fourierových řad

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)]$$

- a_0 ... stejnosměrná složka
- a_k, b_k ... koeficienty Fourierovy řady
- k ... pořadí harmonické složky

Polární tvar Fourierových řad

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cos(k\omega_0 t + \phi_k)$$

- c_k ... amplituda k-té spektrální složky
- ϕ_k ... fáze k-té spektrální složky

Komplexní (exponenciální) tvar Fourierových řad

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t}$$

- X_k ... komplexní koeficient

Fourierova transformace (FT)

Spojité případ

Fourierova transformace

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i\xi t} dt$$

Inverzní Fourierova transformace

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)e^{2\pi i\xi t} d\xi$$

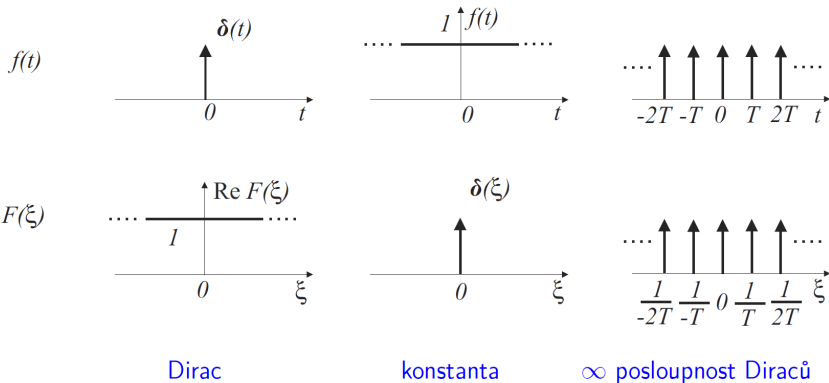
Význam: Každá funkce se dá vyjádřit jako vážený součet mnoha komplexních exponenciál.

Eulerův vztah: $e^{i\xi} = \cos \xi + i \sin \xi$

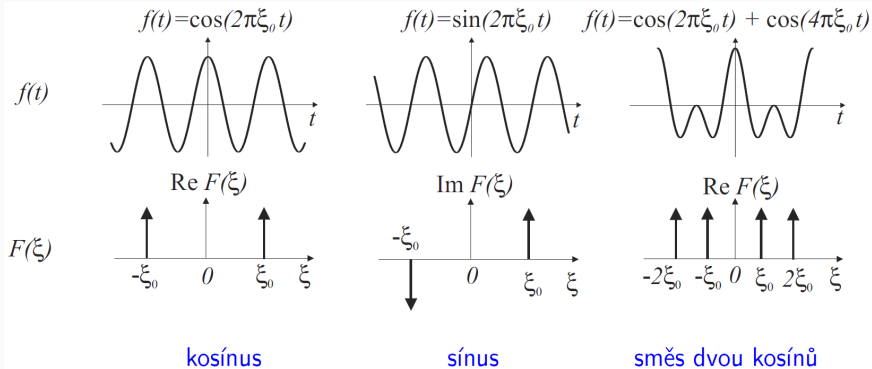
Základní vlastnosti Fourierovy transformace

Vlastnosti	$f(t)$	$F(\xi)$
Linearita	$a f_1(t) + b f_2(t)$	$a F_1(\xi) + b F_2(\xi)$
Dualita	$F(t)$	$f(-\xi)$
Konvoluce	$(f * g)(t)$	$F(\xi) G(\xi)$
Součin	$f(t) g(t)$	$(F * G)(\xi)$
Časový posun	$f(t - t_0)$	$e^{-2\pi i \xi t_0} F(\xi)$
Frekvenční posun	$e^{2\pi i \xi_0 t} f(t)$	$F(\xi - \xi_0)$
Derivace	$\frac{df(t)}{dt}$	$2\pi i \xi F(\xi)$
Násobení t	$t f(t)$	$\frac{i}{2\pi} \frac{dF(\xi)}{d\xi}$
Změna měřítka času	$f(at)$	$\frac{1}{ a } F(\xi/a)$

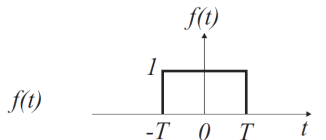
Příklad Fourierovy transformace



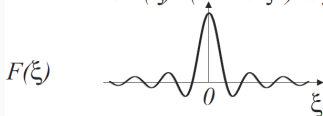
Příklad Fourierovy transformace



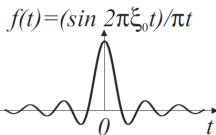
Příklad Fourierovy transformace



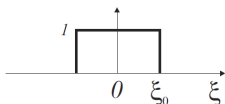
$$\operatorname{Re} F(\xi) = (\sin 2\pi\xi T) / \pi\xi$$



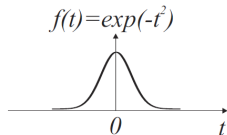
obd\u011bn\u00edk v t



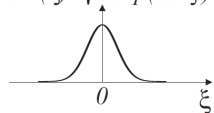
$$\operatorname{Re} F(\xi)$$



obd\u011bn\u00edk v ξ



$$\operatorname{Re} F(\xi) = \sqrt{\pi} \exp(-\pi^2 \xi^2)$$



Gaussi\u00e1n

Diskrétní případ Fourierovy transformace (DFT)

Diskrétní Fourierova transformace

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-\frac{2\pi i kn}{N}}$$

Inverzní diskrétní Fourierova transformace

$$f(n) = \sum_{k=0}^{N-1} F(k) e^{\frac{2\pi i kn}{N}}$$

- $f(n)$... vstupní posloupnost
- $F(k)$... Fourierovo spektrum

Amplitudové, fázové a výkonové spektrum

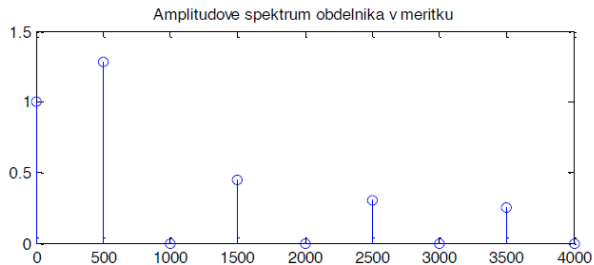
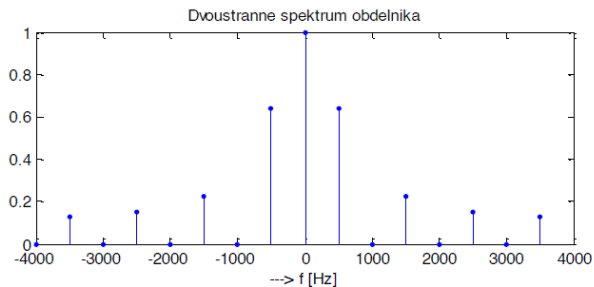
Spektrum reálného signálu $S(\omega)$ je komplexní veličina, kterou můžeme rozložit na amplitudovou a fázovou složku spektra. Dále je možno odvodit tzv. výkonové spektrum.

- Amplitudové spektrum vypočteme jako $|S(\omega)|$.
- Fázové spektrum vypočteme jako úhel $\arg S(\omega)$
- Výkonové spektrum vypočteme jako $|S(\omega)|^2$

Je-li signál reálný, pak pro jeho spektrum platí:

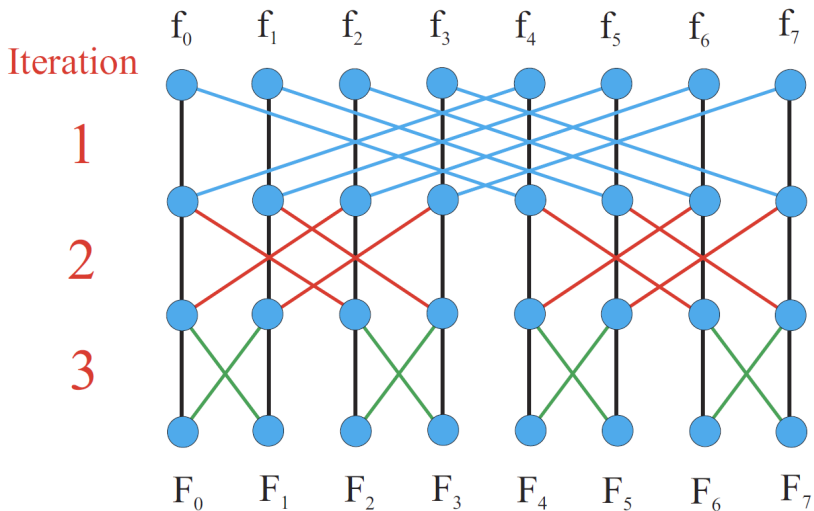
- Amplitudové spektrum je sudou funkcí.
- Fázové spektrum je lichou funkcí.
- Spektrum sudého signálu je sudou reálnou funkcí.
- Spektrum lichého signálu je lichou ryze imaginární funkcí.

Jednostranné a dvoustranné spektrum



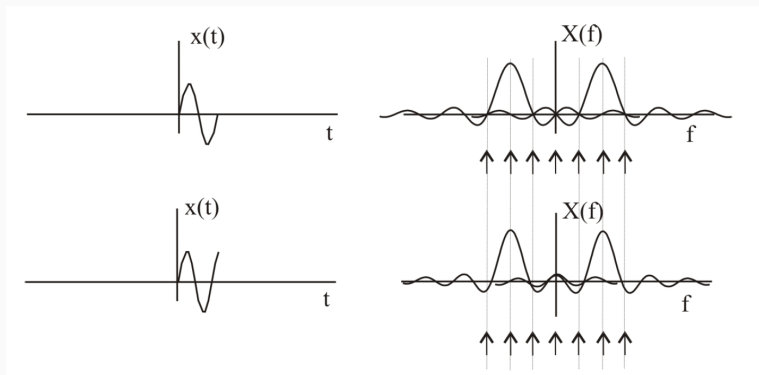
- **Rychlá Fourierova transformace** (FFT - Fast Fourier Transform) je efektivní algoritmus pro výpočet Diskrétní Fourierovy transformace (DFT) a její inverze (iDFT).
- DFT má složitost $\mathcal{O}(N^2)$, což říká, že počet kroků algoritmu bude v nejhorším případě úměrna kvadrátu počtu vzorků. Naproti tomu algoritmus FFT má složitost $\mathcal{O}(N \log_2 N)$.
- Existuje mnoho různých typů FFT algoritmů.

Motýlkové schéma výpočtu FFT

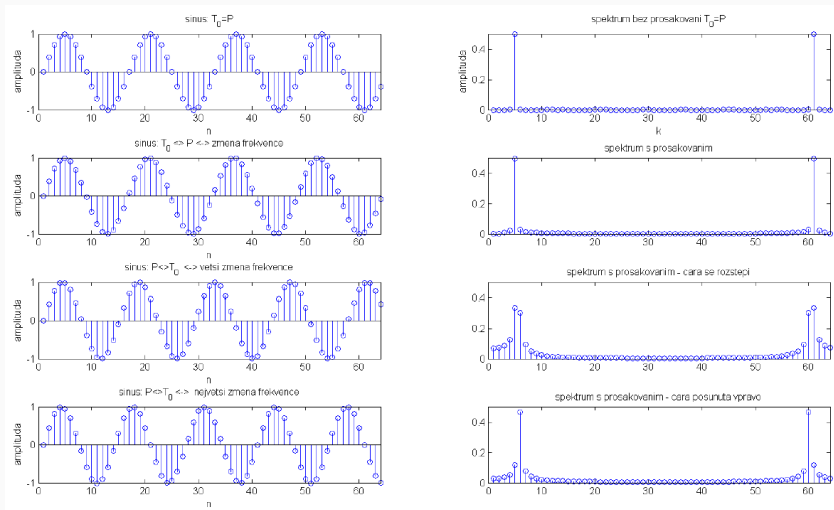


Prosakování ve spektru (Spectrum leakage)

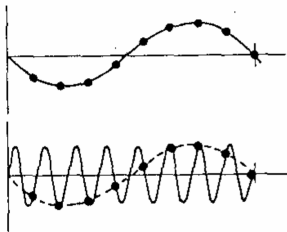
- Prosakování způsobuje že spektrum získané pomocí DFT je pouze aproximací spektra a ne jeho přesným obrazem.
- Níže je ukázka prosakování s následným vzorkováním spektra (ilustrace chování DFT).



Ilustrace proskování způsobené změnou frekvence sinusovky



Aliasing



nízkofrekvenční signál

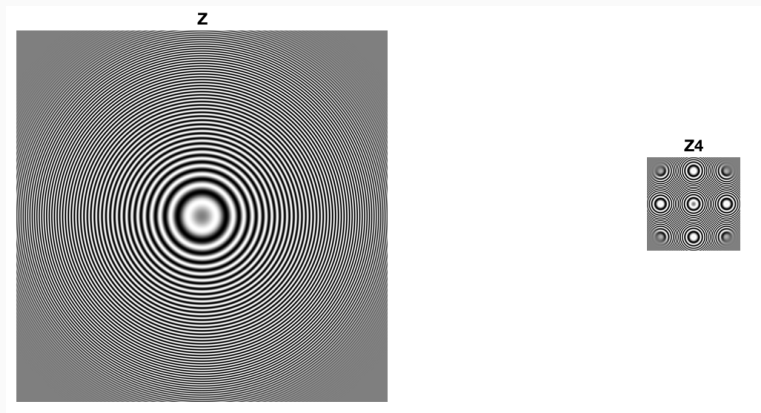
vysokofrekvenční signál

Tento jev plyne z diskretizace původně spojitého časového signálu. Při malé vzorkovací frekvenci je přítomnost vysokých frekvencí v původním signálu špatně interpretována. Tyto vysoké frekvence se ve spektru objeví jako nízké frekvence (budou od skutečných nízkofrekvenčních složek nerozpoznatelné).



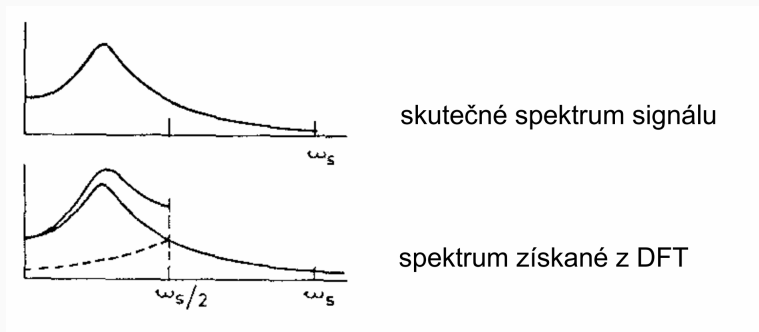
Kamerový záznam má omezenou snímkovou frekvenci = možnost uplatnění aliasingu při frekvencích $>$ polovina snímkové frekvence.

Aliasing v praxi



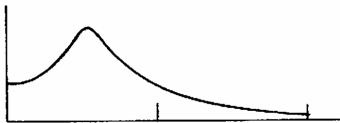
K aliasingu můž docházet přizmenšování obrazu. Ukázka při zmenšení pomocí funkce $Z4 = Z(1 : 4 : end, 1 : 4 : end)$;

Použití anti-aliasingového filtru na signál

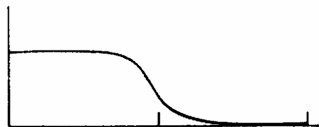


Nejvyšší frekvence, která může být ve spektru obsažena, je $s/2$. Vyšší frekvence jsou "zrcadleny" do nižších frekvencí.

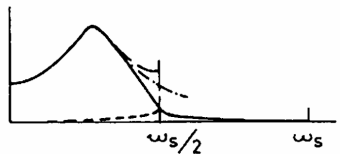
Použití anti-aliasingového filtru na signál



nefiltrovaný signál



anti-aliasingový filtr



filtrovaný signál

Anti-aliasingový filtr aplikuje na původní časový signál filtr typu dolní propust s ostrou sestupnou hranou.