Analýza signálů I

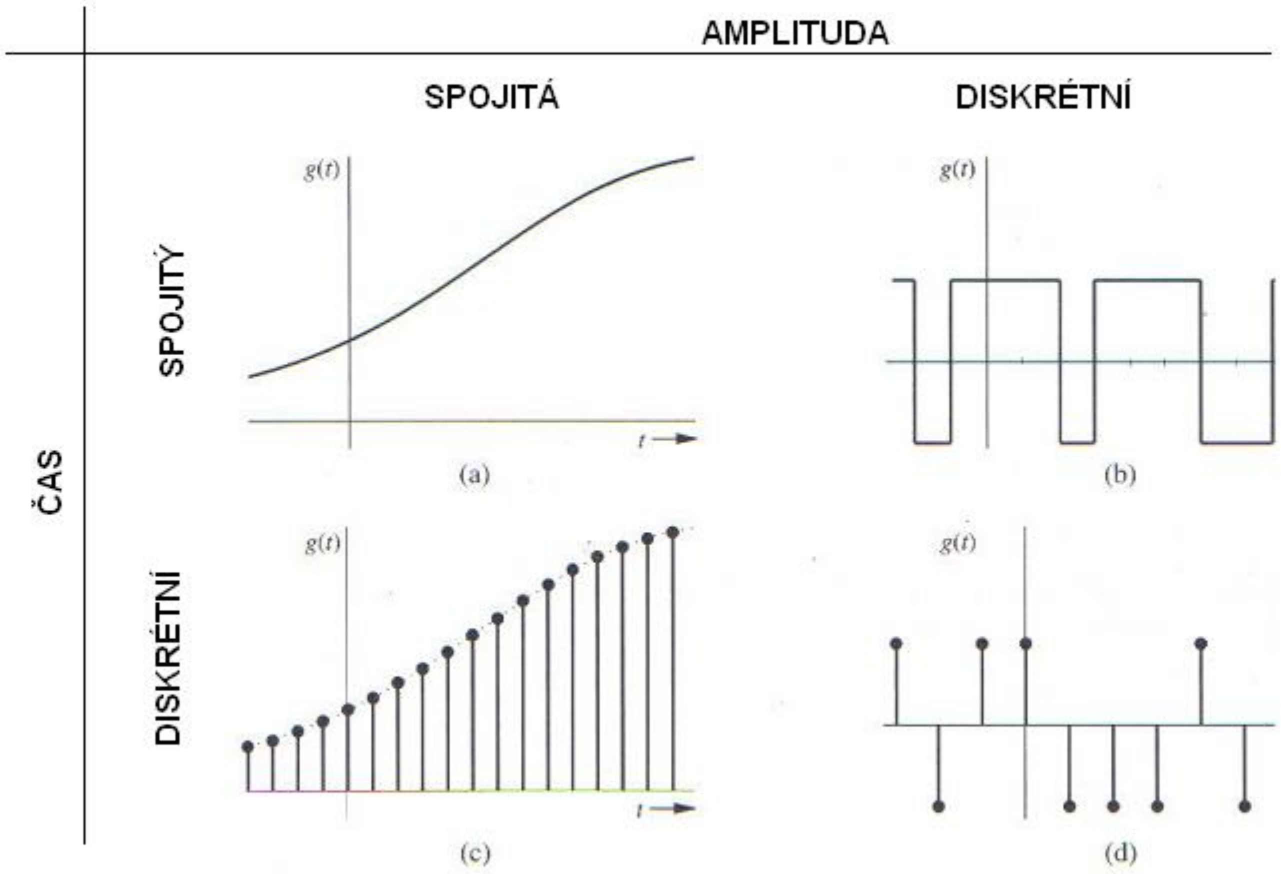
Blok 1 část 2

Ing. Jan Hejda, Ph.D.
jan.hejda@fbmi.cvut.cz

Zpracování signálu

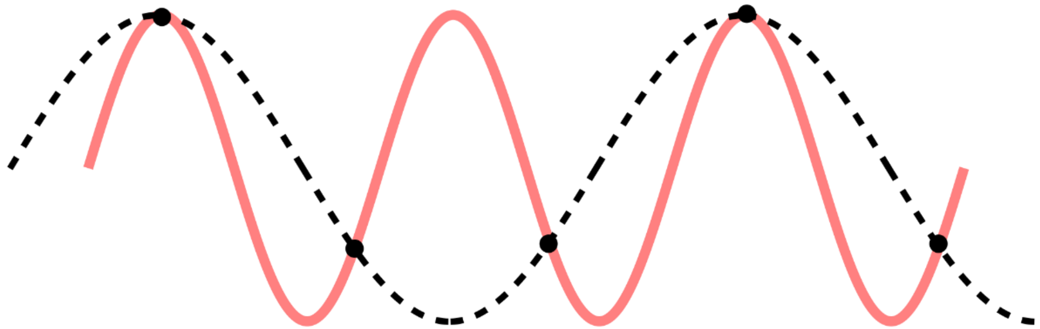
Analogový signál → Dolní propust → Vzorkování + kvantování → DSP → Rekonstrukce signálu → Analogový signál

Spojitý vs. diskrétní signál



Vzorkovací teorém

- Shannonův teorém,
- Nyquistův teorém,
- Kotělnikovův teorém.



$$f_s > 2f_{max}$$

kde

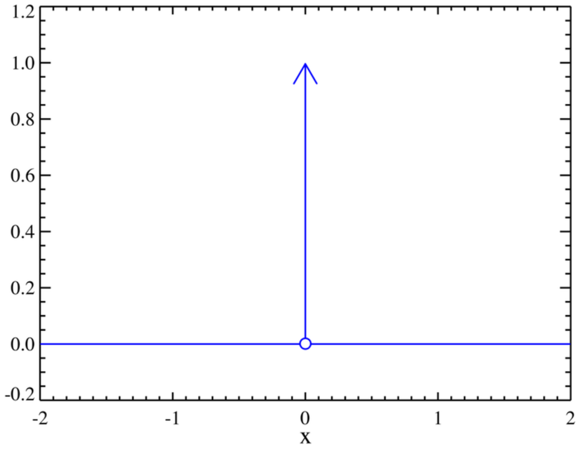
f_s je vzorkovací frekvence

f_{max} je maximální frekvence obsažená v signálu.

Jednotkový impuls

$$\partial(t) = \begin{cases} +\infty & pro\ x = 0 \\ 0 & pro\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \partial(t) dt = 1$$



Lineární systémy

- Pokud

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t)$$
$$x_2(t) \rightarrow y_2(t)$$

- Pak platí
  - **Aditivita**

$$x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t)$$

  - **Homogenita**

$$ax_1(t) \rightarrow ay_1(t)$$

Časově invariantní systém

- Nemění své chování v čase.
- Jeho výstup závisí pouze na vstupu, případně stavu systému.

$$x(t-k) \rightarrow y(t-k)$$

Lineární časově invariantní systém

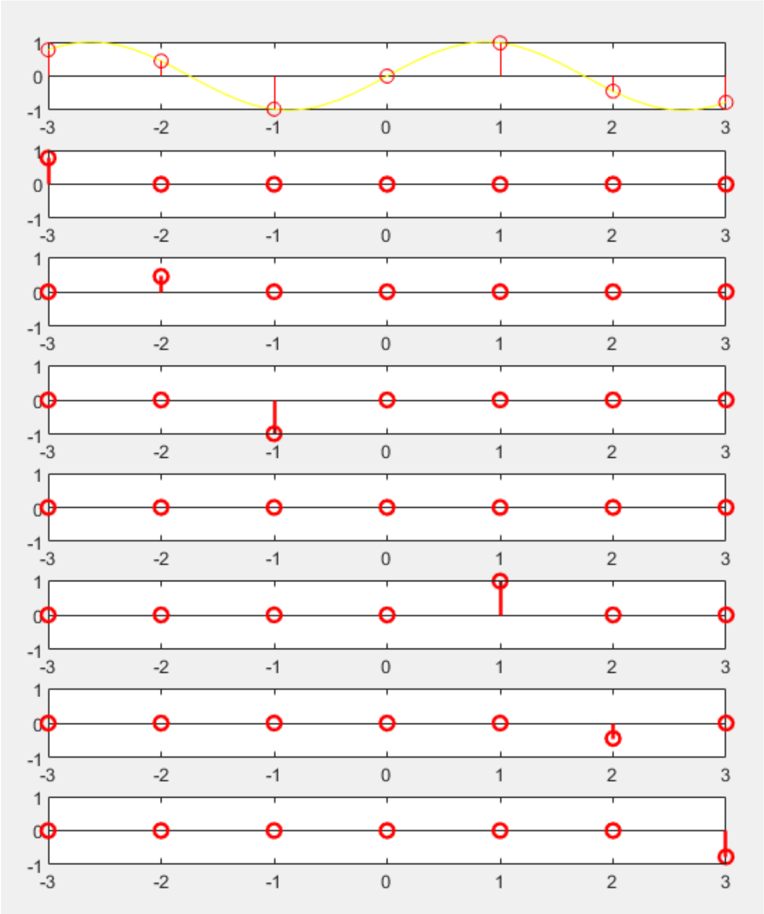
- LTI – Linear Time-Invariant

$$x(n) = \ \dots + x(-1)\partial(n+1) + x(0)\partial(n) + x(1)\partial(n-1) + x(2)\partial(n-2)\ \dots$$

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\,\partial(n-k)$$

Lineární časově invariantní systém

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\,\partial(n-k)$$



Lineární časově invariantní systém

- Odezva LTI systému na jednotkový impuls $\partial(n-k)$ se obvykle označuje jako posloupnost $h_k(n)$.

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\partial(n-k) \rightarrow y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h_k(n)$$

Lineární časově invariantní systém

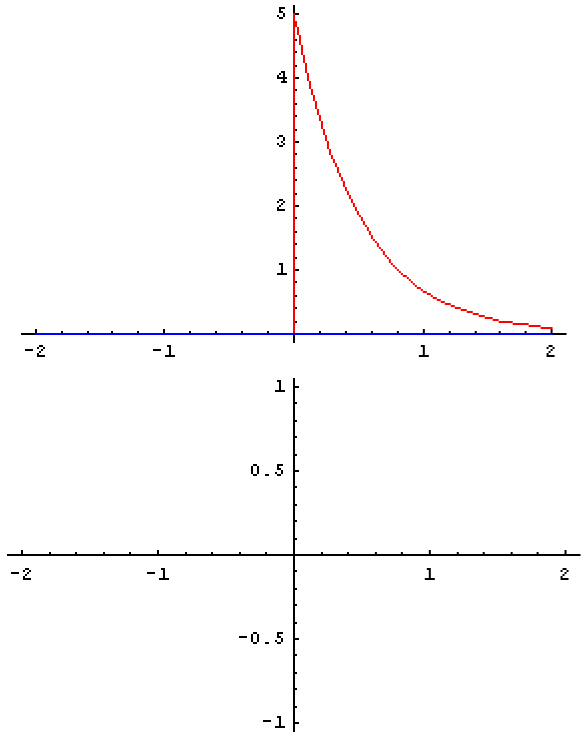
$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\partial(n-k) \rightarrow y(n) = x(n) * h(n)$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

- Konvoluční suma
- $*$ je operátor **konvoluce**.
- $h(n)$, tedy odezva na jednotkový impuls, se nazývá **impulsní charakteristika**.

Konvoluce

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) g(x - \alpha) d\alpha$$

$g(x)$ se označuje jako **konvoluční jádro**.

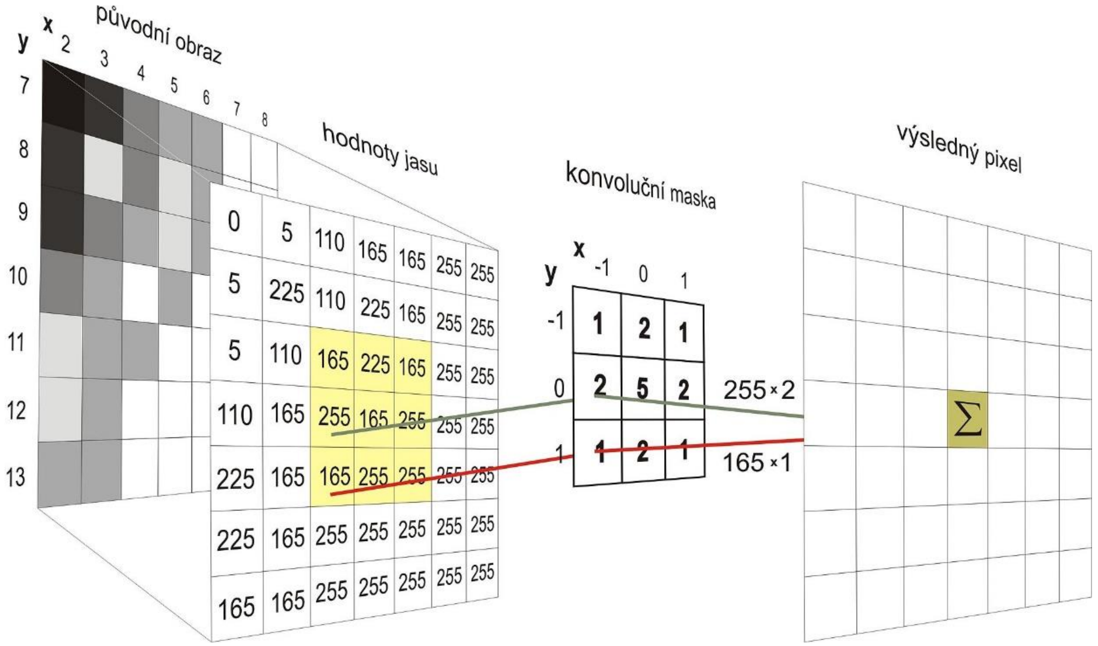


Diskrétní konvoluce

$$(f * g)(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i) g(n - i)$$

Diskrétní 2D konvoluce

$$(f * g)(x, y) = \sum_{i=-k}^{k} \sum_{j=-k}^{k} f(x-i, y-j) h(i, j)$$



Korelace

- Určuje vzájemnou podobnost signálů.

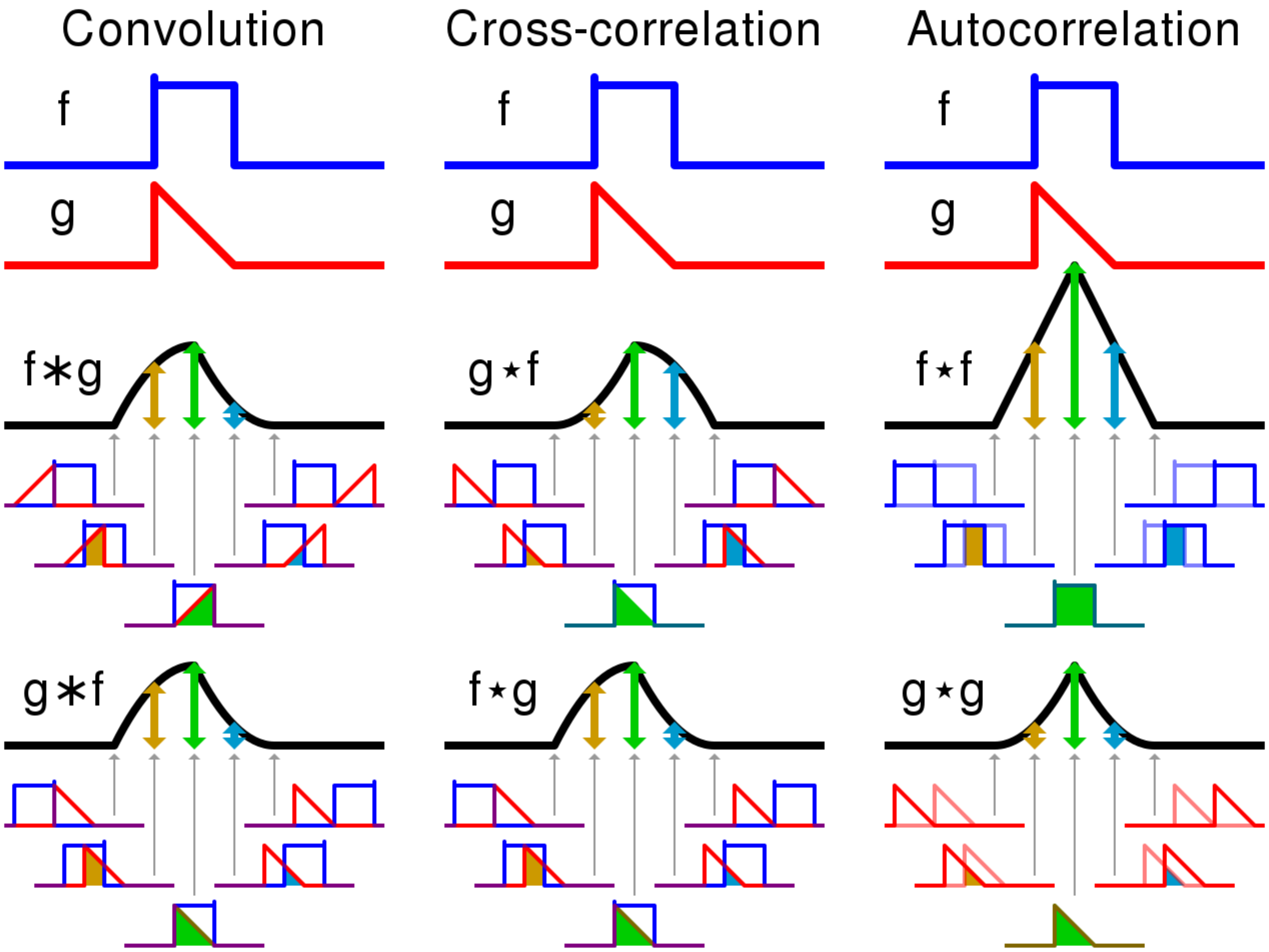
$$(f \star g)(t) = R_{fg}(t) = \int f^*(\tau) g(t+\tau) d\tau$$

- **Autokorelace** – určuje, zda se signál neopakuje

$$(f \star f)(t) = R_{ff}(t)$$

Diskrétní korelace

$$(f \star g)(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f^*(k) g(k+n)$$

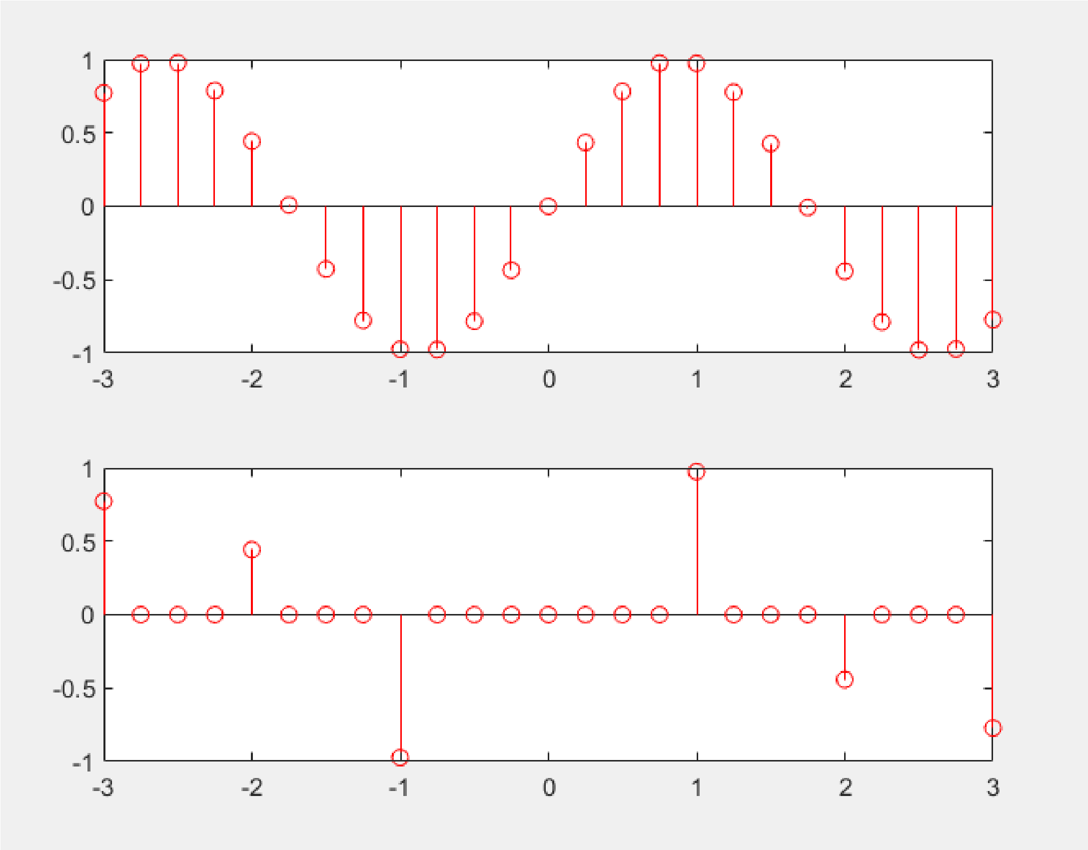

Convolution
Cross-correlation
Autocorrelation
f
g
f∗g
g∗f
g⋆f
f⋆g
f⋆f
g⋆g

Převzorkování

- Zvýšení / snížení vzorkovací frekvence
- **Decimace** vs. **interpolace**

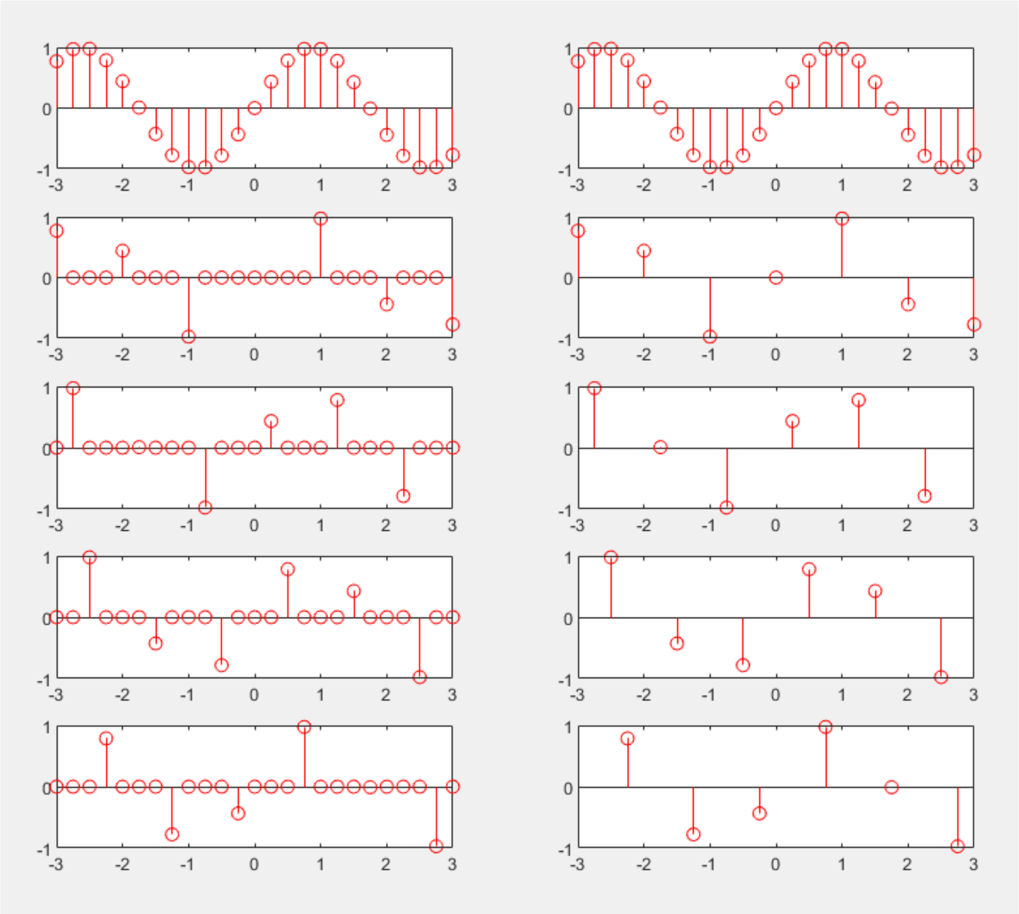
Decimace

- Snížení vzorkovací frekvence.
- Výběr r-tého vzorku.
- Aliasing.



Decimace

- Polyfázové složky signálu.



Interpolace

- Zvýšení vzorkovací frekvence přidáním vzorků.
- Není nutně inverzní k decimaci.
- **Zero interpolation** – doplnění nul

$$y(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{N}\right) & n = kN \\ 0 & n \neq kN \end{cases}$$

  - Lowpass filter na výsledný signál

Interpolace

- **Step interpolation** – doplnění předchozí známou hodnotou
$$y(n) = x\left\lfloor \frac{n}{N} \right\rfloor$$
- **Lineární interpolace** – doplnění lineární funkcí procházející okolními vzorky.